НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

На правах рукопису
УДК 517.518.11+517.518.18

До захисту допущено
В. о. завідувача кафедри ММСА

О.Л.Тимощук

«___» ____________ 2019 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра за спеціальністю 124 Системний аналіз
на тему: «Узагальнення класичної конструкції поверхневої міри»

Виконав:
студент II курсу, групи КА-81мп
Сніжко Богдан Миколайович ____________

Керівник: професор кафедри ММСА
д.ф.-м.н, проф. Богданський Ю. В. ____________

Рецензент: в. о. завідувача кафедри
диференціальних рівнянь
КПІ ім. Ігоря Сікорського
д.ф.-м.н., проф. Дудкін М. Є. ____________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань
Студент ____________

Київ
2019

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

Рівень вищої освіти — другий (магістерський)
Спеціальність — 124 «Системний аналіз»

ЗАТВЕРДЖУЮ
В. о. завідувача кафедри ММСА
О. Л. Тимощук
«___» ____________ 2019 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту Сніжку Богдану Миколайовичу

1. Тема дисертації: «Узагальнення класичної конструкції поверхневої міри», науковий керівник дисертації Богданський Юрій Вікторович, д.ф.-м.н., професор, затверджені наказом по університету від «08» листопада 2019 р. № 3862-с

2. Термін подання студентом дисертації: 13 грудня 2019 р.

3. Об'єкт дослідження: теорія міри; поверхневі міри у скінченновимірному просторі.

4. Предмет дослідження: конструкція поверхневої міри, асоційованої з неінваріантною мірою у скінченновимірному просторі; класична та альтернативна конструкції поверхневих мір у скінченновимірному просторі.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) дослідити сучасний стан розвитку проблеми побудови поверхневих мір;

2) проаналізувати різні способи формалізації поняття поверхні;

3) розробити підхід до побудови поверхневої міри елементарних параметризованих поверхонь довільної корозмірності, вкладених у скінченновимірний простір, у випадку міри у просторі, абсолютно неперервної відносно інваріантної міри Лебега;

4) дослідити коректність розробленої конструкції та її узгодженість із відомими класичними результатами;

5) порівняти розроблений метод побудови поверхневої міри з альтернативним підходом, що базується на наборі попарно комутуючих векторних полів та асоційованій формі поверхні, для поверхонь довільної корозмірності, вкладених у скінченновимірний простір;

6) сформулювати концептуальні висновки за результатами наукового дослідження.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу:
1) слайди презентації на захист магістерської дисертації (рис.).

7. Орієнтовний перелік публікацій:
1) публікація наукової статті у міжнародному журналі «Mathematics in Modern Technical University»: Альтернативна конструкція поверхневої міри у скінченновимірному просторі;
2) публікація наукової статті у фаховому журналі «Системні дослідження та інформаційні технології»: Поверхневі міри, асоційовані з неінваріантною мірою у скінченновимірному просторі (подана до друку).

8. Дата видачі завдання: 05 вересня 2019 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації
1.	Концептуальний вступ дисертації. Формулювання об'єкта, предмета, цілі, завдань, новизни, значущості результатів	05.09.2019—12.09.2019
2.	Перший розділ. Огляд літературно-інформаційних джерел. Понятійно-категоріальний апарат. Характеристика об'єкта. Допоміжні теоретичні відомості	13.09.2019—22.09.2019
3.	Другий розділ. Розробка узагальнення класичної конструкції поверхневої міри. Дослідження її коректності та узгодженості з відомими результатами	23.09.2019—27.10.2019
4.	Третій розділ. Дослідження еквівалентності узагальненої класичної конструкції з альтернативним підходом. Підготовка прикладів.	28.10.2019—25.11.2019
5.	Концептуальні висновки. Перспективи розвитку отриманих рішень	26.11.2019—06.12.2019
6.	Підготовка доповіді до захисту магістерської дисертації	07.12.2019—13.12.2019

Студент Б. М. Сніжко

Науковий керівник дисертації Ю. В. Богданський

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 109 с., 26 джерел.

АСОЦІЙОВАНА ПОВЕРХНЕВА МІРА, ГЛАДКА ЕЛЕМЕНТАРНА ПОВЕРХНЯ, МІРА ЖОРДАНА, МІРА ЛЕБЕГА, НЕІНВАРІАНТНА МІРА.

Об'єкт дослідження – теорія міри; поверхневі міри у скінченновимірному просторі.

Предмет дослідження – конструкція поверхневої міри, асоційованої з неінваріантною мірою у скінченновимірному просторі; класична та альтернативні конструкції поверхневих мір у скінченновимірному просторі.

Мета роботи – розроблення коректної конструкції міри поверхонь у скінченновимірному евклідовому просторі, асоційованої з неінваріантною мірою, заданою у цьому просторі, та дослідження властивостей вказаної конструкції.

Методи дослідження – сучасний апарат диференціальної геометрії, топології, математичного аналізу, теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Результати роботи – вивчено властивості гладких поверхонь, вкладених у скінченновимірний евклідів простір; розроблено узагальнення класичного методу обчислення площі (об'єму) таких поверхонь; для довільної міри, абсолютно неперервної відносно інваріантної міри Лебега із неперервною похідною Радона–Нікодима, побудовано поверхневу міру, асоційовану з даною мірою; досліджено узгодженість розробленої узагальненої класичної конструкції із альтернативним підходом, в якому поверхнева міра будується на основі асоційованої форми поверхні та строго трансверсального до поверхні набору векторних полів; з'ясовано, що вказані методики дають еквівалентні результати.

Наукова новизна одержаних результатів – запропоновано нову коректну конструкцію поверхневої міри у скінченновимірному просторі, асоційованої з довільною мірою у просторі, яка є абсолютно неперервною відносно інваріантної міри Лебега з неперервною похідною Радона–Нікодима.

ABSTRACT

Master’s thesis: 109 pages, 26 bibliographic references.

ASSOCIATED SURFACE MEASURE, SMOOTH ELEMENTARY SURFACE, JORDAN MEASURE, LEBESGUE MEASURE, NON-INVARIANT MEASURE.

Object of research – measure theory; surface measures in a finite-dimensional space.

Subject of research – construction of surface measure associated with a non-invariant measure in a finite-dimensional space; classical and alternative constructions of surface measures in a finite-dimensional space.

Purpose of research – to develop a correct measure construction on surfaces in a finite-dimensional Euclidean space associated with a non-invariant measure defined in this space and study properties of this construction.

Research methods – modern instruments of differential geometry, topology, mathematical analysis, and theory of ordinary differential equations.

Research results – properties of smooth surfaces embedded in a finite-dimensional Euclidean space have been studied; a generalization of the classical method of calculating the area (volume) of such surfaces has been developed; for an arbitrary measure, absolutely continuous with respect to the invariant Lebesgue measure with a continuous Radon–Nikodym derivative, a surface measure associated with this measure has been constructed; consistency of the developed generalized classical construction with the alternative approach has been investigated; it has been found that the above techniques give equivalent results.

Scientific novelty of the results – a new correct construction of surface measure in a finite-dimensional space is proposed. This surface measure is associated with an arbitrary measure in a finite-dimensional space that is absolutely continuous with respect to the invariant Lebesgue measure with a continuous Radon–Nikodym derivative.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАК, СИМВОЛІВ І СКОРОЧЕНЬ

$A \Rightarrow B$	із твердження A випливає твердження B
$A \Leftrightarrow B$	твердження A та B є рівносильними (еквівалентними)
$A \subset B$	множина A є підмножиною B (при цьому випадок $A = B$ також можливий)
$A \setminus B$	різниця множин A і B
$A \vartriangle B$	симетрична різниця множин A та B
$A \vee B$	диз'юнктне об'єднання множин A і B (тобто $A \vee B = A \cup B$ за умови $A \cap B = \emptyset$)
$A \coloneqq B$	для об'єкта B вводиться позначення A
$A =: B$	те ж саме, що й $B \coloneqq A$
A^c	доповнення до множини A (відносно деякої фіксованої в даному контексті універсальної множини)
$B(a, r)$	відкрита куля радіуса r з центром у точці a у деякому зрозумілому з контексту метричному просторі
$B[a, r]$	замкнена куля радіуса r з центром у точці a у деякому зрозумілому з контексту метричному просторі
$\mathbb{C}$	поле комплексних чисел
$f: A \to B$	f є відображенням з A в B, тобто множина A є областю визначення f, множина B є областю прибуття f
$\mathbb{N}$	множина усіх натуральних чисел (натуральними ми називаємо цілі додатні числа)
$\mathbb{R}$	поле дійсних чисел
$x \in A$	x є елементом множини A (x належить множині A)
$\mathbb{Z}$	множина усіх цілих чисел
$\blacksquare$	кінець доведення теореми, твердження, леми або наслідку

ВСТУП

У курсі математичного аналізу розглядають кратні інтеграли (здебільшого подвійні та потрійні) і їх різноманітні застосування. Одним із геометричних застосувань подвійного інтеграла є пошук площі гладкої елементарної поверхні в $\mathbb{R}^3$ (зокрема гладкою двовимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^3$ є графік довільної неперервно диференційовної функції $f: D \to \mathbb{R}$, де D – вимірна за Жорданом множина в $\mathbb{R}^2$). Таку конструкцію поверхневої міри можна природно поширити на гладкі k-вимірні поверхні в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq k)$ [1]. Відповідний підхід до побудови мір поверхонь, вкладених в $\mathbb{R}^m$, будемо називати класичним. Оскільки будь-який m-вимірний лінійний простір над полем $\mathbb{R}$ є ізоморфним простору $\mathbb{R}^m$, то класичну конструкцію поверхневої міри можна розглядати в довільному скінченновимірному просторі.

Водночас у нескінченновимірних просторах відсутня інваріантна міра Лебега (Henri Léon Lebesgue), тобто ненульова міра, яка не змінюється при зсувах множин, тому класичний підхід до побудови поверхневої міри виявляється незастосовним. Виникає потреба розглядати простір функцій і простір мір окремо, а отже, постає необхідність побудови такого аналізу мір, який був би паралельним до аналізу функцій. Основи теорії міри ґрунтовно викладені, наприклад, в [2], [3].

Одним із найбільш актуальних питань нескінченновимірного аналізу сьогодні є проблема побудови поверхневих мір на поверхнях, вкладених у нескінченновимірний простір. Потреби теоретичної фізики й випадкових процесів зумовлюють необхідність розробки теорії інтегрування в нескінченновимірних просторах. Початкові кроки у вирішенні проблеми конструювання поверхневих мір були зроблені А. В. Скороходом [4]. У роботах О. В. Угланова (Угланов Алексей Владимирович) [5], [6] було розроблено методику поверхневого інтегрування у просторах Фреше. Інший підхід до побудови поверхневих мір запропонували В. І. Богачов (Богачев Владимир Игоревич) та О. В. Пугачов (Пугачев Олег Всеволодович) [7].

Юрієм Вікторовичем Богданським у праці [8], яка є покращеною версією більш ранньої роботи [9], було запропоновано спосіб конструювання поверхневих мір для поверхонь корозмірності 1, вкладених у банахів многовид. У роботі [10] розроблено метод побудови поверхневих мір на поверхнях довільної скінченної корозмірності, вкладених у банахів многовид із рівномірною структурою. У праці [11] здійснено аналіз транзитивності поверхневих мір, введених у [10]. А у праці [12] для випадку поверхонь, вкладених у скінченновимірний простір, досліджено питання узгодженості вказаного підходу до побудови поверхневої міри із класичною конструкцією площі (об’єму) поверхні. У сучасному аналізі все більшої ваги набувають нелінійні многовиди. Змістовні аналітичні побудови на них неможливі без розвиненої теорії інтегрування. Внаслідок цього виникає потреба описати досить широкий клас мір, властивості яких були б узгодженими із гладкою структурою многовиду, а також алгебраїчними структурами, які можуть бути на ньому наявними. До окресленого класу мір належать міри, диференційовні уздовж векторних полів. Поняття диференційовності міри уздовж векторного поля є природним узагальненням поняття диференційовності міри уздовж сталого вектора [13].

Евклідів арифметичний простір $\mathbb{R}^m$ є частковим випадком банахового многовиду з рівномірною структурою. Побудові поверхневих мір в $\mathbb{R}^m$ за схемою, наведеною у роботі [10], та дослідженню узгодженості отриманих результатів із формулами класичної конструкції присвячена стаття [12] Катерини Віталіївни Моравецької.

Мета нашої роботи – розробити узагальнення класичної конструкції поверхневої міри, а саме: вивести формули для поверхневої міри, асоційованої з неінваріантною мірою в $\mathbb{R}^m$, абсолютно неперервною відносно інваріантної міри Лебега із неперервною похідною Радона–Нікодима (Johann Karl August Radon, Otton Marcin Nikodym). Одним із завдань роботи також є дослідження еквівалентності отриманої узагальненої конструкції із альтернативним підходом, наведеним у роботах [10] та [12].

1 АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ПРОБЛЕМИ ПОБУДОВИ ПОВЕРХНЕВИХ МІР. ДОПОМІЖНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Топологічні та метричні простори

Наведемо деякі вихідні означення, потрібні для подальшого викладу матеріалу. Під абстрактною множиною будемо розуміти будь-яку множину довільної природи.

Через 2^X будемо позначати сім'ю усіх підмножин множини X.

Означення 1 [14]. Нехай X – абстрактна множина; τ – сукупність підмножин X, яка володіє такими властивостями:

а) $\emptyset, X \in \tau$;

б) об'єднання довільної (скінченної чи нескінченної) сукупності множин із τ належить сім'ї τ;

в) перетин будь-якої скінченної кількості множин із τ належить τ.

Така сукупність τ підмножин X називається топологією на X. Множину X із заданою на ній топологією τ називають топологічним простором і позначають (X, τ).

Означення 2 [14]. Нехай (X, τ) – топологічний простір. Елементи топології τ називаються відкритими множинами (відкритими підмножинами X).

Означення 3 [14]. Нехай X – абстрактна множина. Легко бачити, що сукупність $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$ підмножин X є топологією на X. Топологія τ_0 називається мінімальною (тривіальною).

Означення 4 [14]. Нехай X – абстрактна множина. Неважко зрозуміти, що сукупність $\tau_1 = 2^X$ підмножин X є топологією на X. Топологія τ_1 називається максимальною (дискретною).

Останні два означення показують, що на одній і тій же множині X можна ввести різні топології (якщо $X \neq \emptyset$).

Зауваження 1. Нехай $X = \emptyset$. Тоді $\tau_0 = \{\emptyset, X\} = \{\emptyset\}$ та $\tau_1 = 2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$, тобто $\tau_0 = \tau_1$. Отже, на порожній множині можна ввести лише одну топологію $\tau = \{\emptyset\}$.

Означення 5 [14]. Нехай (X, τ) – топологічний простір. Множина $A \subset X$ називається замкненою множиною (замкненою підмножиною X), якщо $A^c \in \tau$. Інакше кажучи, множина $A \subset X$ є замкненою, якщо її доповнення відкрите.

Твердження 1. Якщо (X, τ) – довільний топологічний простір і $\mathfrak{A}$ – сукупність усіх замкнених підмножин X, то тоді:

а) $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$;

б) перетин довільної (скінченної або нескінченної) сукупності множин із $\mathfrak{A}$ належить $\mathfrak{A}$;

в) об'єднання довільної скінченної кількості множин із $\mathfrak{A}$ належить $\mathfrak{A}$.

Доведення. Доведемо факт а). Оскільки $\emptyset \in \tau$, то $X = \emptyset^c \in \mathfrak{A}$. Аналогічно, оскільки $X \in \tau$, то $\emptyset = X^c \in \mathfrak{A}$.

Покажемо справедливість пункту б). Нехай I – довільна непорожня індексна множина; $A_\alpha \in \mathfrak{A} \quad \forall \alpha \in I$. Покажемо, що $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ є замкненою множиною. За правилом де Моргана, $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$. Кожна множина A_α^c є відкритою, тому, за властивістю б) з означення 1 топології, $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c \in \tau$. Отже, $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathfrak{A}$ згідно з означенням 5 замкненої множини.

Доведемо виконання пункту в). Нехай $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathfrak{A}$. Доведемо, що $\bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathfrak{A}$. Знову скористаємося правилом де Моргана: $(\bigcup_{i=1}^m A_i)^c = \bigcap_{i=1}^m A_i^c$. Кожна множина A_i^c є відкритою, тому, за властивістю в) з означення 1 топології, $\bigcap_{i=1}^m A_i^c \in \tau$. Отже, $\bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathfrak{A}$ згідно з означенням 5 замкненої множини. ■

Означення 6 [14]. Сукупність B деяких відкритих множин топологічного простору (X, τ) називають базою топології τ, якщо для будь-якої відкритої множини $U \in \tau$ і для кожної точки $x \in U$ знайдеться така множина $V \in B$, що $x \in V$ та $V \subset U$.

Зауваження 2. Умову означення 6, якій має задовольняти сукупність B відкритих множин простору (X, τ), щоб називатися базою топології τ, можна послабити. А саме, достатньо перевіряти виконання відповідної умови лише для непорожніх множин $U \in \tau$. Дійсно, якою б не була сукупність B, умова $\forall x \in \emptyset$ $\exists V \in B$: $(x \in V) \wedge (V \subset U)$ буде виконаною, адже стосовно елементів порожньої множини будь-яке твердження є істинним.

Твердження 2. Нехай (X, τ) – топологічний простір; B – сукупність деяких відкритих підмножин X. Тоді наступні дві умови еквівалентні:

а) B – база топології τ;

б) кожну непорожню відкриту множину простору (X, τ) можна представити у вигляді об'єднання деякої сукупності множин із B.

Доведення. Покажемо, що з умови а) випливає умова б). Беремо довільну множину $U \in \tau$, $U \neq \emptyset$. Для кожної точки $x \in U$ фіксуємо таку множину $V_x \in B$, що $x \in V_x$ та $V_x \subset U$ (множина V_x існує для кожного $x \in U$ за означенням 6 бази топології). Лишилося зрозуміти, що $U = \bigcup_{x \in U} V_x$. Дійсно, вкладення $U \subset \bigcup_{x \in U} V_x$ виконане, адже кожна точка $x \in U$ міститься принаймні у "своїй" множині V_x. Зворотне вкладення $U \supset \bigcup_{x \in U} V_x$ також зрозуміле, адже $\forall x \in U$: $V_x \subset U$ за побудовою V_x.

Тепер доведемо, що з умови б) слідує умова а). Розглянемо довільну множину $U \in \tau$ (згідно з зауваженням 2, можна вважати множину U непорожньою). Потрібно показати, що $\forall x \in U$ $\exists V_x \in B$: $(x \in V_x) \wedge (V_x \subset U)$. Відомо, що $U = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$, де I – деяка індексна множина; $V_\alpha \in B$ $\forall \alpha \in I$. Тоді для кожного $x \in U$ в якості множини V_x достатньо взяти таку множину V_α, що $x \in V_\alpha$. ■

Лема 1. Нехай $B = \{V_\alpha : \alpha \in I\}$, I – непорожня множина індексів, V_α – абстрактні множини. Нехай відомо, що $\forall \alpha, \beta \in I$, $\forall x \in V_\alpha \cap V_\beta$ $\exists V_\gamma \in B$: $x \in V_\gamma \subset \left(V_\alpha \cap V_\beta\right)$. Тоді:

$$\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in I, \forall x \in \bigcap_{k=1}^{m} V_{\alpha_k} \ \exists V_x \in B: x \in V_x \subset \bigcap_{k=1}^{m} V_{\alpha_k}.$$

Доведення. Доводимо індукцією за m:

– база індукції: m=2. Тоді твердження $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in I$, $\forall x \in V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}$ $\exists V_x \in B$: $x \in V_x \subset \left(V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}\right)$ виконане в силу умови леми;

– припущення індукції: нехай твердження леми виконується для всіх m від 2 до деякого n включно;

– крок індукції: перевіряємо, що твердження справедливе для m=n+1. Фіксуємо довільні індекси $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in I$ та будь-яку точку $x \in \bigcap_{k=1}^{n+1} V_{\alpha_k}$. $\bigcap_{k=1}^{n+1} V_{\alpha_k} \subset \bigcap_{k=1}^{n} V_{\alpha_k}$. За припущенням індукції, $\exists W_x \in B$: $x \in W_x \subset \bigcap_{k=1}^{n} V_{\alpha_k}$. $\left(W_x \subset \bigcap_{k=1}^{n} V_{\alpha_k}\right) \Rightarrow \left(W_x \cap V_{\alpha_{n+1}} \subset \bigcap_{k=1}^{n+1} V_{\alpha_k}\right)$. Оскільки $x \in W_x$ та $x \in \bigcap_{k=1}^{n+1} V_{\alpha_k} \subset V_{\alpha_{n+1}}$, то $x \in W_x \cap V_{\alpha_{n+1}}$. Тепер використаємо базу індукції й отримаємо: $\exists A_x \in B$: $x \in A_x \subset \left(W_x \cap V_{\alpha_{n+1}}\right)$. Висновок: $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in I$, $\forall x \in \bigcap_{k=1}^{n+1} V_{\alpha_k}$ $\exists V_x \coloneqq A_x \in B$: $x \in V_x \subset \bigcap_{k=1}^{n+1} V_{\alpha_k}$, тобто лему доведено. ■

Наслідок 1. Нехай виконані всі умови леми 1. Тоді $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in I$ або множина $\bigcap_{k=1}^{m} V_{\alpha_k}$ є порожньою, або вона допускає представлення у вигляді об’єднання деякої сукупності множин із *B*.

Доведення. Нехай m=1. Тоді твердження наслідку очевидне. Нехай тепер $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Візьмемо довільні індекси $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in I$. Припустимо, що $\bigcap_{k=1}^{m} V_{\alpha_k} \neq \emptyset$. За лемою 1, $\forall x \in \bigcap_{k=1}^{m} V_{\alpha_k}$ $\exists V_x \in B$: $x \in V_x \subset \bigcap_{k=1}^{m} V_{\alpha_k}$. Позначимо: $U = \bigcap_{k=1}^{m} V_{\alpha_k}$. Легко бачити, що $U = \bigcup_{x \in U} V_x$, причому кожна множина V_x належить сім’ї *B*. ■

Означення 7 [14]. Нехай *X* – абстрактна множина. Сукупність $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ підмножин *X* називають покриттям *X*, якщо $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

Теорема 1 (критерій бази). Нехай *X* – абстрактна множина, $B = \{V_\alpha : \alpha \in I\}$ – покриття *X*, *I* – непорожня множина індексів. Тоді наступні дві умови еквівалентні:

а) *B* є базою деякої топології на *X*;

б) для будь-яких $V_\alpha, V_\beta \in B$, для кожного $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ існує множина $V_\gamma \in B$ така, що $x \in V_\gamma \subset \left(V_\alpha \cap V_\beta\right)$.

Доведення. Нехай B є базою деякої топології τ на X (тобто B задовольняє умові а)). Фіксуємо довільні множини $V_\alpha, V_\beta \in B$. Оскільки, за означенням бази, $B \subset \tau$, то множини V_α і V_β – відкриті. Тому й $V_\alpha \cap V_\beta$ є відкритою множиною. Але тоді, за означенням 6, $\forall x \in V_\alpha \cap V_\beta \ \exists V_\gamma \in B$: $(x \in V_\gamma) \wedge \left(V_\gamma \subset (V_\alpha \cap V_\beta)\right)$, тобто справджується умова б).

Покажемо тепер, що з умови б) випливає умова а). Побудуємо топологію τ на X за таким сценарієм: $U \in \tau$ у тому й тільки тому разі, коли або $U = \emptyset$, або $\exists I_0 \subset I$: $U = \bigcup_{\alpha \in I_0} V_\alpha$. Покажемо, що τ дійсно є топологією на X. $\emptyset \in \tau$ за побудовою. $X \in \tau$, оскільки B є покриттям X, тобто $X = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$. Візьмемо тепер довільну сукупність множин $\{U_\beta : \beta \in J\}$, $J \neq \emptyset$, $U_\beta \in \tau \ \ \forall \beta \in J$. Розглянемо множину $U = \bigcup_{\beta \in J} U_\beta$. Якщо $U_\beta = \emptyset \ \forall \beta \in J$, то $U = \emptyset \in \tau$. Якщо ж $\exists \beta_0 \in J$: $U_{\beta_0} \neq \emptyset$, то $\exists I_0 \subset I$: $U = \bigcup_{\alpha \in I_0} V_\alpha$, тому $U \in \tau$. Ми показали, що об'єднання довільної сукупності множин із τ належить τ. Доведемо, що перетин будь-якої скінченної кількості множин із τ належить τ. Нехай $U_1, U_2, \ldots, U_m \in \tau$. Якщо $\exists k_0 \in \overline{1,m}$: $U_{k_0} = \emptyset$, то $\bigcap_{k=1}^m U_k = \emptyset \in \tau$. Якщо ж $U_k = \bigcup_{\alpha_k \in I_k} V_{\alpha_k} \ \forall k \in \overline{1,m}$, то

$$\bigcap_{k=1}^m U_k = \bigcap_{k=1}^m \bigcup_{\alpha_k \in I_k} V_{\alpha_k} = \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in I_1 \times \ldots \times I_m} \left(V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} \cap \ldots \cap V_{\alpha_m}\right).$$

Зафіксуємо довільний набір індексів $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in I_1 \times \ldots \times I_m$. Оскільки $I_k \subset I \ \forall k \in \overline{1,m}$, то $\alpha_k \in I \ \forall k \in \overline{1,m}$. За наслідком 1, або $V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} \cap \ldots \cap V_{\alpha_m}$ є порожньою множиною, або ж ця множина допускає представлення у вигляді об'єднання деякої сукупності множин із B. Тому й $\bigcap_{k=1}^m U_k = \bigcup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in I_1 \times \ldots \times I_m} \left(V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} \cap \ldots \cap V_{\alpha_m}\right)$ є об'єднанням деякої сукупності множин із B. Але це означає, що $\exists I_0 \subset I$: $\bigcap_{k=1}^m U_k = \bigcup_{\alpha \in I_0} V_\alpha$, тому $\bigcap_{k=1}^m U_k \in \tau$. Отже, τ – топологія на X. Однак ще треба довести, що B є базою топології τ. Але це очевидно в силу твердження 2 з урахуванням способу побудови топології τ. ■

Теорема 2 [14]. Нехай X – абстрактна множина, $\{S_\alpha : \alpha \in I\}$ – довільне покриття X, $I \neq \emptyset$. Тоді сукупність усіх множин вигляду $\bigcap_{\alpha \in K} S_\alpha$, де K – довільна скінченна підмножина I, утворює базу деякої топології на X.

Означення 8 [14]. Нехай X – абстрактна множина, $\{S_\alpha : \alpha \in I\}$ – покриття X, $I \neq \emptyset$. Сім'я $\{S_\alpha : \alpha \in I\}$ стосовно тієї топології, яку вона породжує (в сенсі теореми 2), називається передбазою вказаної топології.

Означення 9 [14]. Якщо (X, τ) – топологічний простір і $x \in X$ – довільна точка, то околом точки x називають будь-яку підмножину $\Omega(x) \subset X$, яка задовольняє двом наведеним далі умовам:

а) $x \in \Omega(x)$;

б) $\exists U \in \tau : x \in U \subset \Omega(x)$.

Твердження 3. Якщо (X, τ) – довільний топологічний простір та $x \in X$, то тоді виконані наступні два твердження:

а) для кожного околу $\Omega(x)$ точки x знайдеться відкрита множина U така, що $x \in U \subset \Omega(x)$;

б) для кожної відкритої множини $U \ni x$ знайдеться окіл $\Omega(x)$ точки x такий, що $x \in \Omega(x) \subset U$.

Доведення. Пункт а) доведення не потребує, адже він у точності співпадає з умовою б) означення 9 околу точки.

Доведемо пункт б). Беремо довільну множину $U \in \tau$ таку, що $x \in U$. Сама множина U і є шуканим околом $\Omega(x)$ точки x таким, що $x \in \Omega(x) \subset U$, адже для U, очевидно, виконуються обидві умови означення 9. ■

У ряді посібників, зокрема [15] та [1], околом точки x топологічного простору (X, τ) називають будь-яку відкриту множину $U \subset X$, що містить x. Отже, твердження 3 показує зв'язок між таким означенням й означенням 9.

Теорема 3 [14]. Нехай (X, τ) – топологічний простір. Множина $A \subset X$ є відкритою тоді й тільки тоді, коли вона містить деякий окіл кожної своєї точки.

Означення 10 [14]. Топологічний простір (X, τ) називають хаусдорфовим (віддільним), якщо для довільних двох різних точок $x, y \in X$ знайдуться такі околи $U(x)$, $U(y)$ цих точок, що $U(x) \cap U(y) = \emptyset$.

Не всі топологічні простори є віддільними. Розглянемо простір (X, τ), де X – будь-яка множина, яка містить принаймні два різні елементи; $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$ – мінімальна (тривіальна) топологія на X. Нехай $x, y \in X$, $x \neq y$. Нехай $U(x)$, $U(y)$ – довільні околи точок x та y відповідно. X – єдина непорожня відкрита множина. Тому з означення околу точки випливає, що $x \in X \subset U(x)$, $y \in X \subset U(y)$. Таким чином, $U(x) = U(y) = X$ і $U(x) \cap U(y) = X \neq \emptyset$.

Означення 11 [14]. Нехай (X, τ), (Y, θ) – довільні топологічні простори; $f: X \to Y$ – довільне відображення. Кажуть, що f є неперервним відображенням топологічних просторів, якщо повний прообраз $f^{-1}(V)$ довільної відкритої множини V простору (Y, θ) є відкритою множиною простору (X, τ).

Лема 2. Нехай X, Y – довільні непорожні множини, $h: X \to Y$ – будь-яке відображення. Тоді $\forall A \subset Y$: $h^{-1}(A^c) = \left(h^{-1}(A)\right)^c$. (Тут під A^c ми розуміємо $Y \setminus A$, а під $\left(h^{-1}(A)\right)^c$ маємо на увазі $X \setminus h^{-1}(A)$).

Доведення. "$\subset$". Припустимо, що $h^{-1}(A^c) = \emptyset$. Тоді, очевидно, $h^{-1}(A^c) \subset \left(h^{-1}(A)\right)^c$. Нехай тепер $h^{-1}(A^c) \neq \emptyset$. Візьмемо будь-яку точку $x \in h^{-1}(A^c)$. За означенням повного прообразу, $h(x) \in A^c$. Оскільки $A \cap A^c = \emptyset$, то $h(x) \notin A$. Із цього випливає, що $x \notin h^{-1}(A)$. Таким чином, $x \in \left(h^{-1}(A)\right)^c$.

"$\supset$". Припустимо, що $\left(h^{-1}(A)\right)^c = \emptyset$. Тоді, очевидно, $h^{-1}(A^c) \supset \left(h^{-1}(A)\right)^c$. Нехай тепер $\left(h^{-1}(A)\right)^c \neq \emptyset$. Беремо довільну точку $x \in \left(h^{-1}(A)\right)^c$. Зрозуміло, що $x \notin h^{-1}(A)$. Тому $h(x) \notin A$. Оскільки $A \cup A^c = Y$, то $h(x) \in A^c$. Отже, за означенням повного прообразу, $x \in h^{-1}(A^c)$. ■

Твердження 4. Нехай (X, τ), (Y, θ) – топологічні простори, $f: X \to Y$. Відображення f є неперервним тоді й тільки тоді, коли повний прообраз $f^{-1}(A)$ будь-якої замкненої множини A в Y є замкненою множиною в X.

Доведення. Нехай відображення $f: X \to Y$ – неперервне. Беремо довільну замкнену множину $A \subset Y$. За означенням замкненої множини, $A^c \in \theta$. Тоді $f^{-1}(A^c) \in \tau$, адже f– неперервне. Але це означає, що $\left(f^{-1}(A^c)\right)^c = f^{-1}((A^c)^c) = f^{-1}(A)$ – замкнена множина в X (див. лему 2).

Нехай тепер f – таке відображення, що повний прообраз $f^{-1}(A)$ будь-якої замкненої множини A в Y є замкненою множиною в X. Беремо будь-яку множину $V \in \theta$. Тоді V^c – замкнена множина в Y. Тому $f^{-1}(V^c)$ є замкненою множиною в X. Отримали, що $\left(f^{-1}(V^c)\right)^c = f^{-1}(V) \in \tau$. Це і доводить неперервність відображення f. ■

Означення 12. Нехай X, Y, Z – абстрактні непорожні множини; $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Відображення $g \circ f: X \to Z$, що діє за правилом

$$g \circ f: X \ni x \mapsto g\big(f(x)\big) \in Z,$$

називається композицією (суперпозицією) відображень f і g.

Твердження 5 [14]. Нехай (X, τ), (Y, θ), (Z, υ) – топологічні простори; $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. Якщо відображення f та g є неперервними, то $g \circ f$ – також неперервне відображення.

Означення 13 [14]. Нехай (X, τ), (Y, θ) – топологічні простори. Відображення $f: X \to Y$ називається гомеоморфізмом, якщо виконані наступні три умови:

– $f: X \to Y$ – бієкція;

– f є неперервним відображенням;

– f^{-1} є неперервним відображенням.

У випадку, якщо існує гомеоморфізм $f: X \to Y$, топологічні простори (X, τ) та (Y, θ) називають гомеоморфними.

Нехай (X, τ) – топологічний простір, $Y \subset X$ – довільна підмножина X. Розглянемо таку систему підмножин в Y: $\tau_Y \coloneqq \{V: V = U \cap Y, U \in \tau\}$. Можна довести (див., наприклад, [14]), що τ_Y є топологією на Y.

Означення 14 [14]. Топологія $\tau_Y = \{V: V = U \cap Y, U \in \tau\}$ на $Y \subset X$ називається топологією, індукованою (успадкованою) з X. Топологічний простір (Y, τ_Y) називається підпростором топологічного простору (X, τ).

Означення 15 [14]. Нехай (X, τ), (Y, θ) – топологічні простори. Відображення $i: Y \to X$ називається вкладенням Y в X, якщо:

– i – неперервне відображення;

– $i: Y \to i(Y)$ є гомеоморфізмом топологічних просторів (Y, θ) та $\left(i(Y), \tau_{i(Y)}\right)$ (тобто на $i(Y) \subset X$ береться саме топологія, індукована з X).

Твердження 6. Нехай (X, τ), (Y, θ) – топологічні простори; $f: X \to Y$ – неперервне відображення; $E \subset X$ – топологічний підпростір простору (X, τ). Тоді відображення $g: E \to Y$, яке задається рівністю $g(x) = f(x)\ \forall x \in E$, також є неперервним.

Доведення. Беремо довільну відкриту множину $U \in \theta$. Покажемо, що $g^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap E$. Нехай $x \in g^{-1}(U)$. Оскільки $g: E \to Y$, то $x \in E$. Водночас $g(x) = f(x) \in U$. Тому $x \in f^{-1}(U)$. Остаточно: $x \in f^{-1}(U) \cap E$. Нехай тепер $y \in f^{-1}(U) \cap E$. Тоді $f(y) \in U$. Оскільки $y \in E$, то $g(y) = f(y) \in U$, тому $y \in g^{-1}(U)$. Рівність $g^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap E$ доведено. Оскільки f є неперервним, то $f^{-1}(U) \in \tau$, а тому, за означенням τ_E, $g^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap E \in \tau_E$. ■

Означення 16. Нехай X – абстрактна множина. Відображення $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ називають метрикою на X, якщо ρ задовольняє наведеним далі умовам а) – г):

а) $\rho(x_1, x_2) \geq 0$ для довільних $x_1, x_2 \in X$;

б) $\rho(x_1, x_2) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$;

в) $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$ для всіх $x_1, x_2 \in X$;

г) $\rho(x_1, x_2) \leq \rho(x_1, x_3) + \rho(x_3, x_2)$ для довільних $x_1, x_2, x_3 \in X$ ("нерівність трикутника").

Умови а) – г) також називають аксіомами метрики. Пара (X, ρ), де X – деяка множина, $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ – метрика на X, називається метричним простором. Елементи множини X зазвичай називають точками.

Виявляється, що поняття топологічного простору є узагальненням поняття метричного простору. Нехай (X, ρ) – метричний простір. На X можна природним чином побудувати топологію.

Означення 17. Нехай $a \in X$, $\varepsilon > 0$. Множину

$$B^X(a, \varepsilon) \coloneqq \{y \in X : \rho(y, a) < \varepsilon\}$$

називають відкритою кулею радіуса ε з центром у точці a метричного простору (X, ρ). У випадку, коли з контексту зрозуміло, про який метричний простір йдеться, будемо замість $B^X(a, \varepsilon)$ писати $B(a, \varepsilon)$. У літературі (наприклад, [14]) можна знайти ще таке позначення відкритої кулі радіуса ε із центром у точці a: $D_\varepsilon(a)$.

Покладемо $\mathfrak{N} = \{B(a, \varepsilon) : a \in X, \varepsilon > 0\}$. Сім'я $\mathfrak{N}$ утворює покриття X. Перевіримо це. Ясно, що $\bigcup_{a \in X, \varepsilon > 0} B(a, \varepsilon) \subset X$. Доведемо зворотне вкладення. Беремо довільну точку $x \in X$. Оскільки $\rho(x, x) = 0 < 1$, то $x \in B(x, 1) \subset \bigcup_{a \in X, \varepsilon > 0} B(a, \varepsilon)$. Покажемо, що $\mathfrak{N}$ є базою деякої топології на X, довівши, що $\mathfrak{N}$ задовольняє умові б) теореми 1. Беремо довільні відкриті кулі $B(a_1, \varepsilon_1)$, $B(a_2, \varepsilon_2) \subset \mathfrak{N}$. Якщо $B(a_1, \varepsilon_1) \cap B(a_2, \varepsilon_2) = \emptyset$, то умова б) теореми 1 тривіально виконується. Нехай $B(a_1, \varepsilon_1) \cap B(a_2, \varepsilon_2) \neq \emptyset$. Візьмемо довільну точку $x \in B(a_1, \varepsilon_1) \cap B(a_2, \varepsilon_2)$. Оскільки $x \in B(a_1, \varepsilon_1)$, то $\rho(x, a_1) < \varepsilon_1$. А оскільки $x \in B(a_2, \varepsilon_2)$, то $\rho(x, a_2) < \varepsilon_2$. Тоді

$$\delta \coloneqq \min\{\varepsilon_1 - \rho(x, a_1), \varepsilon_2 - \rho(x, a_2)\} > 0.$$

Розглянемо відкриту кулю $B(x, \delta) \in \mathfrak{N}$.

$$\forall y \in B(x, \delta) : \rho(y, a_1) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a_1) < \delta + \rho(x, a_1) \leq \varepsilon_1.$$

Аналогічно:

$$\rho(y, a_2) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a_2) < \delta + \rho(x, a_2) \leq \varepsilon_2.$$

Це означає, що $y \in B(a_1, \varepsilon_1) \cap B(a_2, \varepsilon_2)$. Оскільки точка $y \in B(x, \delta)$ була обрана довільно, отримуємо: $B(x, \delta) \subset (a_1, \varepsilon_1) \cap B(a_2, \varepsilon_2)$. Таким чином, для сім'ї $\mathfrak{N}$ умова б) теореми 1 про критерій бази виконується.

Означення 18 [14]. Нехай (X, ρ) – метричний простір, $\mathfrak{N} = \{B(a, \varepsilon): a \in X, \varepsilon > 0\}$. Топологія τ_ρ на X, що визначається базою $\mathfrak{N}$, називається топологією, індукованою метрикою ρ, або метричною топологією. Якщо не сказано про інше, на метричному просторі розглядається саме метрична топологія.

Означення 19. Нехай на $\mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ введено метрику ρ рівністю

$$\rho(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_m - b_m)^2},$$

де $\vec{a} = (a_1, \dots, a_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$, Топологію, індуковану такою метрикою ρ, будемо називати стандартною топологією на $\mathbb{R}^m$.

Твердження 7. Нехай (X, ρ) – довільний метричний простір; τ_ρ – топологія на X, індукована метрикою ρ. Нехай $A \subset X$. Тоді дві наступні умови є еквівалентними:

а) $A \in \tau_\rho$;

б) $\forall a \in A \; \exists \varepsilon_a > 0: B(a, \varepsilon_a) \subset A$.

Іншими словами, стверджується, що множина A є відкритою в (X, τ_ρ) у тому й тільки тому випадку, коли кожна точка $a \in A$ входить в A разом із деякою кулею, центром якої є точка a.

Доведення. Покажемо, що з умови а) випливає умова б). Нехай $A \in \tau_\rho$. Якщо $A = \emptyset$, то умова б) тривіально виконується, адже стосовно елементів порожньої множини будь-яке твердження є правдивим. Припустимо тепер, що $A \neq \emptyset$. Тоді A є об'єднанням деякої сукупності множин із $\mathfrak{N} = \{B(x,\varepsilon): x \in X, \varepsilon > 0\}$ (див. твердження 2). Візьмемо будь-яку точку $a \in A$. Існують такі $x \in X$ та $\delta > 0$, що $a \in B(x,\delta) \subset A$. Позначимо: $\varepsilon_a \coloneqq \delta - \rho(a,x)$. Оскільки $a \in B(x,\delta)$, то $\rho(a,x) < \delta$, тому $\varepsilon_a > 0$. Достатньо тепер довести, що $B(a,\varepsilon_a) \subset B(x,\delta)$. Беремо довільну точку $y \in B(a,\varepsilon_a)$. $\rho(y,x) \leq \rho(y,a) + \rho(a,x) < \varepsilon_a + \rho(a,x) = \delta$. Отже, $y \in B(x,\delta)$.

Доведемо, що з умови б) слідує умова а). Відомо, що $\forall a \in A\ \exists \varepsilon_a > 0$: $B(a,\varepsilon_a) \subset A$. Для кожної точки $a \in A$ зафіксуємо відповідну кулю $B(a,\varepsilon_a)$. Тоді $A = \bigcup_{a \in A} B(a,\varepsilon_a)$. Однак кожна куля $B(a,\varepsilon_a)$ належить сім'ї $\mathfrak{N}$, яка є базою топології τ_ρ, тому, звісно, $B(a,\varepsilon_a) \in \tau_\rho$. Водночас об'єднання довільної сукупності відкритих множин є відкритою множиною. Таким чином, $A \in \tau_\rho$. ■

1.2 Алгебри та σ-алгебри множин. Заряди й міри

Означення 20. Нехай X – абстрактна множина; $\mathfrak{A} \subset 2^X$. Множина $\mathfrak{A}$ називається алгеброю множин (алгеброю підмножин в X), якщо виконані такі три умови:

а) $\emptyset \in \mathfrak{A}$;

б) $(A, B \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathfrak{A})$;

в) $(A \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (A^c \coloneqq X \setminus A \in \mathfrak{A})$.

Зауваження 3. Довільна алгебра $\mathfrak{A}$ підмножин в X має такі властивості:

– $X \in \mathfrak{A}$;

– $(A, B \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (A \cap B \in \mathfrak{A})$;

– $(A, B \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (A \setminus B \in \mathfrak{A})$;

– $(A, B \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (A \triangle B \coloneqq (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathfrak{A})$

– $\forall m \in \mathbb{N}$: $(A_1, \dots, A_m \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{m} A_i \in \mathfrak{A})$;

– $\forall m \in \mathbb{N}$: $(A_1, \dots, A_m \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (\bigcap_{i=1}^{m} A_i \in \mathfrak{A})$.

Зауваження 4. Нехай $X = \emptyset$. Тоді, очевидно, $2^X = \{\emptyset\}$. Із означення алгебри множин випливає, що на X можна задати єдину алгебру множин: $\mathfrak{A} = \{\emptyset\} = 2^X$.

Твердження 8. Нехай X – абстрактна множина; $\mathfrak{A} \subset 2^X$. Нехай $\mathfrak{A}$ є непорожньою сім'єю, $(A, B \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathfrak{A})$, а також $(A \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (A^c \in \mathfrak{A})$. Тоді $\mathfrak{A}$ є алгеброю підмножин в X.

Доведення. З означення 20 випливає, що для доведення твердження достатньо показати: $\emptyset \in \mathfrak{A}$. Фіксуємо довільну множину $A \in \mathfrak{A}$ (така множина існує, адже за умовою твердження $\mathfrak{A} \neq \emptyset$). $A^c \in \mathfrak{A}$, тому й $A \cup A^c \in \mathfrak{A}$. Але $A \cup A^c = X$. Тоді $\emptyset = X^c \in \mathfrak{A}$. ■

Означення 21. Нехай X – абстрактна множина; $\mathfrak{A} \subset 2^X$. Множина $\mathfrak{A}$ називається σ-алгеброю множин (σ-алгеброю підмножин в X), якщо виконані наступні умови:

а) $\mathfrak{A}$ є алгеброю підмножин в X;

б) $(A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A})$.

Зауваження 5. Окрім усіх властивостей алгебри множин, довільна σ-алгебра $\mathfrak{A}$ підмножин в X володіє зокрема такою властивістю:

$$(A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}).$$

Це легко бачити із правила де Моргана: $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c$.

Твердження 9. Нехай X – абстрактна множина; $\mathfrak{A} \subset 2^X$. Сім'я $\mathfrak{A}$ є σ-алгеброю підмножин в X тоді й тільки тоді, коли виконані такі три умови:

а) $\mathfrak{A}$ є непорожньою сім'єю;

б) $(A \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (A^c \in \mathfrak{A})$;

в) $(A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A})$.

Доведення. Нехай $\mathfrak{A}$ є σ-алгеброю підмножин в X (згідно з означенням 21). Тоді, оскільки $\mathfrak{A}$ зокрема є алгеброю множин, виконано $\emptyset \in \mathfrak{A}$, а отже, $\mathfrak{A}$ – непорожня сім'я підмножин в X. Умова б) даного твердження співпадає з умовою в) означення алгебри множин. Умова в) даного твердження – це в точності умова б) означення σ-алгебри множин. Отже, якщо $\mathfrak{A}$ – σ-алгебра множин, то всі три умови, вказані в цьому твердженні, виконуються для $\mathfrak{A}$.

Нехай тепер $\mathfrak{A}$ – така сім'я, для якої виконуються вказані у формулюванні твердження умови а) – в). Оскільки умова б) означення σ-алгебри множин для $\mathfrak{A}$ справджується, то достатньо перевірити, що $\mathfrak{A}$ утворює алгебру підмножин в X. Враховуючи, що $\mathfrak{A}$ – непорожня сім'я, можемо взяти довільні множини $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ (не факт, що вони різні, але це не принципово). Покладемо також $A_n \coloneqq A_2 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$. За умовою в) з формулювання твердження, маємо: $A_1 \cup A_2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$. Отже, $\mathfrak{A}$ задовольняє умову б) означення алгебри множин. Умова в) означення алгебри теж виконана, бо вона співпадає з умовою б) формулювання даного твердження. Таким чином, лишається перевірити тільки умову а) означення 20. Але її виконання випливає з твердження 8. ■

Твердження 10. Нехай X – абстрактна множина. Тоді:

а) сім'ї $\mathfrak{A}_1 \coloneqq \{\emptyset, X\}$ та $\mathfrak{A}_2 \coloneqq 2^X$ є σ-алгебрами підмножин в X;

б) для довільної алгебри множин $\mathfrak{A}$ в виконується вкладення $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_2$.

Доведення. Перевіримо справедливість пункту а). Розглянемо сім'ю $\mathfrak{A}_1$. Умова а) з означення алгебри множин, очевидно, виконується. Умова в) також виконана, адже $\emptyset^c = X \in \mathfrak{A}_1$ та $X^c = \emptyset \in \mathfrak{A}_1$. Для перевірки умови б) означення 20 візьмемо $A, B \in \mathfrak{A}_1$. Якщо $A = B = \emptyset$, то $A \cup B = \emptyset \in \mathfrak{A}_1$. А якщо $A = X$ або $B = X$, то $A \cup B = X \in \mathfrak{A}_1$. В обох випадках маємо: $A \cup B \in \mathfrak{A}_1$. Таким чином, $\mathfrak{A}_1$ – алгебра підмножин в X. Лишилося перевірити виконання умови б) з означення σ-алгебри множин. Беремо довільну послідовність множин $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}_1$. Якщо $A_i = \emptyset \ \forall i \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset \in \mathfrak{A}_1$. Якщо ж $A_i = X$ хоча б для одного $i \in \mathbb{N}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X \in \mathfrak{A}_1$. В обох випадках отримуємо бажану належність $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}_1$.

Розглянемо тепер сім'ю $\mathfrak{A}_2$. Ясно, що $\emptyset \in \mathfrak{A}_2$, і жодна з операцій над множинами, згаданих в означеннях алгебри та σ-алгебри множин, не може вивести за межі $2^X = \mathfrak{A}_2$. Тому $\mathfrak{A}_2$ – σ-алгебра підмножин в X.

Доведемо пункт б). Візьмемо $\mathfrak{A}$ – довільну алгебру підмножин в X. Із означення та найпростіших властивостей алгебри множин маємо: $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$, тобто $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$. З іншого боку, $\mathfrak{A} \subset 2^X = \mathfrak{A}_2$ за означенням 20 алгебри множин. ■

Можна довести, що існує така множина X і така алгебра $\mathfrak{A}$ підмножин в X, що $\mathfrak{A}$ не є σ-алгеброю підмножин в X.

Означення 22 [2]. Нехай X – абстрактна множина, $\mathfrak{A}$ – σ-алгебра підмножин в X. Тоді пару $(X, \mathfrak{A})$ називають вимірним простором. Водночас якщо $A \in \mathfrak{A}$, то множину A називають вимірною множиною.

Означення 23 [16]. Нехай $\mathfrak{A}$ – довільна алгебра множин (необов'язково σ-алгебра). Функція $w: \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ називається зарядом, якщо виконуються дві умови:

а) $(A, B \in \mathfrak{A}, A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \big(w(A \vee B) = w(A) + w(B)\big)$ (адитивність);

б) $(A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}, A_n \searrow \emptyset) \Rightarrow (w(A_n) \to 0, n \to \infty)$ (неперервність).

Зауваження 6. Запис "$A_n \searrow A$" є символічним. Він означає, що $\forall n \in \mathbb{N}$: $A_n \supset A_{n+1}$ і $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$. В означенні вище $A = \emptyset$. Окрім цього запису, використовується й такий символічний запис: "$A_n \nearrow A$". Він означає, що $\forall n \in \mathbb{N}$: $A_n \subset A_{n+1}$ і $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Означення 24. Нехай $\mathfrak{A}$ – довільна алгебра множин. Функція $\mu: \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ називається мірою, якщо μ є зарядом на $\mathfrak{A}$ і, до того ж, μ – невід'ємна функція, тобто $(A \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (\mu(A) \geq 0)$.

Означення 25. Нехай X – абстрактна множина, $\mathfrak{A}$ – σ-алгебра підмножин в X, μ – міра на $(X, \mathfrak{A})$. Тоді трійку $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ називають простором із мірою.

Означення 26. Нехай $\mathfrak{A}$ – довільна алгебра множин (необов'язково σ-алгебра). Функція $w: \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ називається σ-адитивною, якщо:

$$\big(A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}\,; A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i \neq j\big) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (w(\vee_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} w(A_n)).$$

Теорема 4. Нехай X – абстрактна множина; $\mathfrak{A}$ – алгебра підмножин в X; $w: \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$. Тоді дві наступні умови є еквівалентними:

– w – заряд;

– w – σ-адитивна функція на $\mathfrak{A}$.

Доведення цієї теореми можна знайти, наприклад, у посібнику [16]. ■

Нехай X – абстрактна множина. Розглянемо довільну сім'ю $\mathfrak{N}$ підмножин в X (тобто $\mathfrak{N} \subset 2^X$). Введемо множину $A = \{\mathfrak{A}_\alpha : \alpha \in I\}$, утворену всіма такими σ-алгебрами $\mathfrak{A}_\alpha$ підмножин в X, що $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{A}_\alpha$. Тут I – деяка індексна множина. A є непорожньою множиною, адже $\mathfrak{N}$ принаймні вкладене в σ-алгебру 2^X. Отже, коректно визначеною є множина $\bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{A}_\alpha$, яку ми позначимо через $\sigma(\mathfrak{N})$. Ясно, що $\forall \alpha_0 \in I$: $\bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{A}_\alpha \subset \mathfrak{A}_{\alpha_0}$. Нехай $A_1, A_2, \ldots \in \sigma(\mathfrak{N})$. Тоді $\forall \alpha \in I$: $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}_\alpha$. Оскільки кожна сім'я $\mathfrak{A}_\alpha$ є σ-алгеброю, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}_\alpha \ \ \forall \alpha \in I$. А тому $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\mathfrak{N}) = \bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{A}_\alpha$. Ми отримали, що для $\sigma(\mathfrak{N})$ виконується умова б) з означення 21. Аналогічно можна показати, що $\sigma(\mathfrak{N})$ задовольняє й умову а) вказаного означення. Отже, $\sigma(\mathfrak{N})$ – σ-алгебра підмножин в X. Оскільки $\mathfrak{N}$ є підмножиною кожного $\mathfrak{A}_\alpha$, то $\mathfrak{N} \subset \sigma(\mathfrak{N})$. Таким чином, $\forall \alpha \in I$: $\mathfrak{N} \subset \sigma(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{A}_\alpha$.

Означення 27. $\sigma(\mathfrak{N})$ називають σ-алгеброю в X, породженою сім'єю $\mathfrak{N}$.

Вищенаведені міркування показують, що $\sigma(\mathfrak{N})$ є мінімальною σ-алгеброю підмножин в X, що включає $\mathfrak{N}$ (мінімальність слід розуміти так: $\sigma(\mathfrak{N})$ є підмножиною будь-якої іншої σ-алгебри множин, що включає $\mathfrak{N}$). $\sigma(\mathfrak{N})$ існує і визначена однозначно для будь-якої сім'ї $\mathfrak{N} \subset 2^X$.

1.3 Абсолютна неперервність зарядів. Теорема Радона–Нікодима

Означення 28 [16]. Нехай X, Y – абстрактні множини; $\mathfrak{A}_X$ – σ-алгебра підмножин в X; $\mathfrak{A}_Y$ – σ-алгебра підмножин в Y (тобто $(X, \mathfrak{A}_X)$, $(Y, \mathfrak{A}_Y)$ – вимірні простори). Нехай $f: X \to Y$. f називається вимірним відображенням, якщо

$$(A \in \mathfrak{A}_Y) \Rightarrow (f^{-1}(A) \in \mathfrak{A}_X).$$

Означення 29. Нехай (X, τ) – топологічний простір. σ-алгебра, породжена топологією τ, називається борелівською σ-алгеброю на X. Борелівську σ-алгебру на X позначають так: $\mathfrak{B}(X)$.

Із означень 29 та 27 випливає, що $\mathfrak{B}(X) = \sigma(\tau)$.

Означення 30. Нехай (X, τ) – топологічний простір. Множини, що входять до $\mathfrak{B}(X)$, називаються борелівськими.

Лема 3. Нехай X, Y – довільні непорожні множини, $h: X \to Y$ – будь-яке відображення. Тоді $\forall A_1, A_2, \ldots \subset Y$: $h^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} h^{-1}(A_n)$.

Доведення не наводимо в силу його простоти. ∎

Наступна лема дозволяє спростити перевірку вимірності відображення.

Лема 4. Нехай $(X, \mathfrak{A}_X)$, $(Y, \mathfrak{A}_Y)$ – довільні вимірні простори. Нехай $\mathfrak{N}$ – така сім’я підмножин в Y, що $\mathfrak{A}_Y = \sigma(\mathfrak{N})$. Тоді: відображення $f: X \to Y$ є вимірним у тому і тільки тому разі, якщо $\forall A \in \mathfrak{N}$: $f^{-1}(A) \in \mathfrak{A}_X$.

Доведення можна знайти, наприклад, у [16]. ∎

Твердження 11. Нехай розглядаються вимірні простори $\big(X, \mathfrak{B}(X)\big)$ та $\big(Y, \mathfrak{B}(Y)\big)$, де X, Y – топологічні простори. Нехай $f: X \to Y$ – неперервне відображення. Тоді f є вимірним відображенням.

Доведення. Згадаймо, що $\mathfrak{B}(Y)$ є σ-алгеброю, породженою сім’єю всіх відкритих підмножин в Y. Нехай U – відкрита підмножина Y. Оскільки f – неперервне відображення, то $f^{-1}(U)$ є відкритою множиною в X (див. означення

11). Тому також має місце належність $f^{-1}(U) \in \mathfrak{B}(X)$. За лемою 4, можемо зробити висновок, що $f: X \to Y$ є вимірним відображенням. ■

Означення 31. Нехай зафіксовано вимірні простори $(X, \mathfrak{A})$ та $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Якщо відображення $f: X \to \mathbb{R}$ є вимірним, то його називають вимірною функцією.

Означення 32 [16]. Нехай X – довільна непорожня множина. Індикатором (індикаторною функцією, характеристичною функцією) j_A множини $A \subset X$ називається функція, задана співвідношенням

$$j_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}.$$

Означення 33. Функція $f: X \to \mathbb{R}$ на вимірному просторі $(X, \mathfrak{A})$ називається простою, якщо існують такі числа $c_k \in \mathbb{R}$ та множини $A_k \in \mathfrak{A}$ $\left(k = \overline{1, m}\right)$, що $X = \bigvee_{k=1}^{m} A_k$ та $f(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k j_{A_k}(x)$ $\forall x \in X$.

Можна показати, що будь-яка проста функція на $(X, \mathfrak{A})$ є вимірною.

Означення 34 [16]. Нехай f – проста функція на просторі з мірою $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, тобто $f = \sum_{k=1}^{m} c_k j_{A_k}$ для деяких $c_k \in \mathbb{R}$ та $A_k \in \mathfrak{A}$. Інтегралом Лебега простої функції f на множині X за мірою μ називають число

$$I(f) = \int_X f d\mu := \sum_{k=1}^{m} c_k \mu(A_k).$$

Дане означення коректне, адже можна довести, що значення $\int_X f d\mu$ не залежить від способу представлення функції f у вигляді лінійної комбінації індикаторів вимірних підмножин X.

Означення 35 [16]. Нехай $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ – довільний простір із мірою; $f: X \to \mathbb{R}$ та $f_n: X \to \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ – вимірні функції.

Кажуть, що послідовність функцій $\{f_n\}$ збігається до f майже всюди, і пишуть $f_n \underset{м.в.}{\longrightarrow} f$ (або $f_n \to f (\operatorname{mod} \mu)$), якщо $\mu\{x \in X: f_n(x) \nrightarrow f(x)\} = 0$.

Кажуть, що послідовність функцій $\{f_n\}$ збігається до f за мірою, і пишуть $f_n \underset{\mu}{\to} f$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \mu\{x \in X: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \to 0$ при $n \to \infty$.

Кажуть, що послідовність функцій $\{f_n\}$ збігається до f майже рівномірно, і пишуть $f_n \underset{м.р.}{\longrightarrow} f$, якщо $\forall \delta > 0 \ \exists Y \in \mathfrak{A}: \begin{cases} \mu(Y) < \delta \\ f_n \rightrightarrows f \text{ на } X \setminus Y \end{cases}$.

Виявляється, що зі збіжності $\{f_n\}$ до f майже всюди випливає збіжність $\{f_n\}$ до f за мірою (теорема Лебега). Якщо $\{f_n\}$ збігається до f за мірою, то існує підпослідовність $\{f_{n_k}\}$ така, що $\{f_{n_k}\}$ збігається до f майже всюди (теорема Рісса). Збіжність $\{f_{n_k}\}$ до f майже рівномірно еквівалентна збіжності $\{f_n\}$ до f майже всюди (зокрема наслідок $\left(f_n \underset{м.в.}{\longrightarrow} f\right) \Rightarrow \left(f_n \underset{м.р.}{\longrightarrow} f\right)$ – це теорема Єгорова). Усі вказані зв'язки між збіжностями вимірних функцій доведені, наприклад, в [16].

Означення 36. Нехай $\{f_n\}$ – послідовність простих функцій на просторі з мірою $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Послідовність $\{f_n\}$ називається фундаментальною в середньому, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \forall m, n \geq N: \int_X |f_m - f_n| d\mu \leq \varepsilon.$$

Означення 37. Нехай f – вимірна функція на просторі з мірою $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Функція f називається інтегровною на $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, якщо існує послідовність $\{f_n\}$ простих функцій така, що виконані наступні дві умови:

– послідовність $\{f_n\}$ є фундаментальною в середньому;

– послідовність $\{f_n\}$ збігається до f майже всюди.

Множину усіх інтегровних функцій на просторі з мірою $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ позначають так: $L_1(X, \mu)$. Якщо ж із контексту зрозуміло, про який простір із мірою йдеться, то замість $L_1(X, \mu)$ пишуть просто L_1.

Означення 38. Нехай f – інтегровна функція на просторі з мірою $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Інтегралом Лебега від функції f по множині X за мірою μ називають число

$$I(f) = \int_X f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Можна довести, що означення 38 є коректним, а саме:

– для довільної послідовності простих функцій $\{f_n\}$, що задовольняє умови означення 38, $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$ існує;

– $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$ не залежить від вибору послідовності $\{f_n\}$, що має всі вказані в означенні 38 властивості.

Означення 39. Нехай $f \in L_1(X,\mu)$, $A \subset X$ – вимірна множина. Інтегралом від функції f по підмножині A називають число $\int_A f d\mu := \int_X (f \cdot j_A) d\mu$.

Можна показати, що $(f \in L_1, A \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (f \cdot j_A \in L_1)$ (див. [16]), тому означення інтеграла по підмножині є коректним.

Зафіксуємо довільний простір із мірою $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Множина $L_1 = L_1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ є лінійним простором, адже вона є лінійним підпростором простору всіх дійснозначних функцій на X. Спроба ввести на L_1 "норму" за правилом $(f \in L_1) \Rightarrow \left(\|f\|_{L_1} := \int_X |f| d\mu\right)$ не приводить до бажаного результату, адже для $\|\cdot\|_{L_1}$ не виконується аксіома невиродженості норми. Тобто з того, що $\|f\|_{L_1} = 0$ не випливає, що $f \equiv 0$. Натомість всі інші аксіоми норми для $\|\cdot\|_{L_1}$ виконуються. Із цієї ситуації виходять так. Розглядають множину $M = \{f \in L_1 : f = 0$ майже всюди$\}$. Легко бачити, що M є підпростором L_1. На L_1 вводять відношення еквівалентності: $(f \sim g) \Leftrightarrow (f - g \sim 0) \Leftrightarrow (f - g \in M)$. За цим відношенням еквівалентності розглядають фактор-множину $\widetilde{L_1} := L_1/_\sim$. Її елементами є класи еквівалентності: $\tilde{f} = f + M$. На $\widetilde{L_1}$ запроваджуються операції суми елементів та добутку елемента на константу: $\tilde{f} + \tilde{g} := \widetilde{f+g}$; $\lambda \cdot \tilde{f} := \widetilde{\lambda \cdot f}$. Ці операції коректно задані і перетворюють $\widetilde{L_1}$ на лінійний простір. На $\widetilde{L_1}$ уже можна коректно запровадити норму за формулою $\|\tilde{f}\| = \int_X |f| d\mu$ (тут $\tilde{f}$ – клас еквівалентності, а f – представник цього класу). На позначення $\widetilde{L_1}$ користуються просто символом L_1, пам'ятаючи, що інтегровні функції, які співпадають майже всюди, ототожнюються (вважаються одним і тим же об'єктом).

Означення 40 [16]. Нехай w – заряд на вимірному просторі $(X, \mathfrak{A})$ (див. означення 23 та 22). Множина $A \in \mathfrak{A}$ називається від'ємною (відносно заряду w), якщо $\forall B \subset A$: $(B \in \mathfrak{A}) \Rightarrow (w(B) \leq 0)$.

Теорема 5 (теорема Хана) [16]. Нехай $w: \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ – заряд на вимірному просторі $(X, \mathfrak{A})$. Тоді існують такі множини $X_+, X_- \in \mathfrak{A}$, що:

– $X = X_+ \vee X_-$;

– $\forall A \in \mathfrak{A}$: $\begin{cases} w(A \cap X_+) \geq 0 \\ w(A \cap X_-) \leq 0 \end{cases}$.

Зауваження 7. Розклад множини X на диз'юнктне об'єднання множин X_+ та X_- називається розкладом Хана множини X.

За заданим зарядом w на вимірному просторі $(X, \mathfrak{A})$ та фіксованим розкладом Хана $X = X_+ \vee X_-$ побудуємо дві нові міри:

– міру w_+ задамо рівністю $w_+(A) = w(A \cap X_+)$ $\forall A \in \mathfrak{A}$;

– міру w_- задамо рівністю $w_-(A) = -w(A \cap X_-)$ $\forall A \in \mathfrak{A}$.

Покажемо, що $w = w_+ - w_-$ (такий розклад заряду на різницю двох мір називають розкладом Жордана). Дійсно, $\forall A \in \mathfrak{A}$: $A = (A \cap X_+) \vee (A \cap X_-)$. Тому $w(A) = w(A \cap X_+) + w(A \cap X_-) = w_+(A) - w_-(A)$.

Означення 41. Нехай w – заряд на вимірному просторі $(X, \mathfrak{A})$. Міру $|w| \coloneqq w_+ + w_-$ називають повною варіацією заряду w.

Зауваження 8. Якщо μ – міра на $(X, \mathfrak{A})$, то одним із розкладів Хана є такий: $X_+ = X$, $X_- = \emptyset$. Тоді $\mu_+ = \mu$, $\mu_- \equiv 0$, а значить, $|\mu| = \mu$.

Означення 42 [16]. Нехай w_1, w_2 – заряди на $(X, \mathfrak{A})$. Заряд w_1 називається абсолютно неперервним відносно заряду w_2 (позначення: $w_1 \prec w_2$), якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: (|w_2|(A) < \delta) \Rightarrow (|w_1|(A) < \varepsilon).$$

Теорема 6 (теорема Радона–Нікодима). Нехай $(X, \mathfrak{A})$ – вимірний простір; μ – міра на $(X, \mathfrak{A})$, w – заряд на $(X, \mathfrak{A})$. Нехай $w \prec \mu$. Тоді:

– існує функція $f \in L_1(X, \mu)$ така, що $\forall A \in \mathfrak{A}$: $w(A) = \int_A f d\mu$;

– якщо $f, g \in L_1(X, \mu)$ – такі функції, що $\forall A \in \mathfrak{A}$: $w(A) = \int_A f d\mu = \int_A g d\mu$, то $f = g$ майже всюди.

Доведення. Див., наприклад, [16]. ■

Означення 43 [16]. Функція f, існування якої випливає із теореми Радона–Нікодима, позначається $\frac{dw}{d\mu}$ і називається щільністю заряду w відносно міри μ (або похідною Радона–Нікодима заряду w відносно міри μ).

1.4 Інваріантна міра Лебега

Означення 44. Замкненим кубом в $\mathbb{R}^k$ з ребрами, паралельними координатним осям, будемо називати будь-яку множину вигляду $[a_1, a_1 + \delta] \times \ldots \times [a_k, a_k + \delta] \subset \mathbb{R}^k$, де $a_i \in \mathbb{R}$ $\forall i \in \overline{1, k}$ та $\delta > 0$.

Нехай K – замкнений куб в $\mathbb{R}^m$ із ребрами, паралельними координатним осям. Нехай $\mathfrak{A}_0^K$ – алгебра скінченних об'єднань паралелепіпедів з K із ребрами, паралельними координатним осям. Через ν_m^K позначимо міру Жордана ("об'єм") на алгебрі $\mathfrak{A}_0^K$. ν_m^K справді є мірою (тобто невід'ємною зліченно-адитивною функцією множин) на $\mathfrak{A}_0^K$ [2]. Можна продовжити міру ν_m^K до (зліченно-адитивної) міри, яку позначатимемо через λ_m^K, на σ-алгебрі $\mathcal{L}_m(K)$ усіх ν_m^K-вимірних підмножин K, яка містить борелівську σ-алгебру.

Означення 45. Вказану вище міру λ_m^K на σ-алгебрі $\mathcal{L}_m(K)$ (тобто лебегівське поповнення міри ν_m^K) називатимемо інваріантною мірою Лебега на кубі K.

Представимо $\mathbb{R}^m$ у вигляді об'єднання «зростаючої» послідовності кубів $K_n \coloneqq \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \colon |x_i| \le n \ \forall i = \overline{1,m}\right\}$ й позначимо через λ_m σ-скінченну міру, породжену мірами Лебега $\lambda_m^{K_n}$ на кубах K_n (див. § 1.6 у [2]).

Означення 46. Нехай $\mathcal{L}_m = \{E \subset \mathbb{R}^m \colon E \cap K_n \in \mathcal{L}_m(K_n) \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Інваріантною мірою Лебега на $\mathbb{R}^m$ називають згадану вище σ-скінченну міру λ_m на $\mathcal{L}_m$. При цьому множини із $\mathcal{L}_m$ називаються вимірними за Лебегом [2].

Покажемо, що $\mathcal{L}_m$ утворює σ-алгебру підмножин в $\mathbb{R}^m$. Скористаємося твердженням 9. Ясно, що $\mathcal{L}_m \ne \emptyset$, адже принаймні $\emptyset \in \mathcal{L}_m$ та $\mathbb{R}^m \in \mathcal{L}_m$. Припустимо, що $A \in \mathcal{L}_m$. Тоді $A \cap K_n \in \mathcal{L}_m(K_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що $A^c \cap K_n = K_n \setminus (A \cap K_n)$. Оскільки $\mathcal{L}_m(K_n)$ є σ-алгеброю при всіх $n \in \mathbb{N}$, то $K_n \setminus (A \cap K_n) \in \mathcal{L}_m(K_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Таким чином, $A^c \in \mathcal{L}_m$. Нехай тепер $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{L}_m$. Тоді $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap K_n = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap K_n) \in \mathcal{L}_m(K_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, а отже, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}_m$. Отримали, що $\mathcal{L}_m$ є σ-алгеброю підмножин в $\mathbb{R}^m$.

Для задання інваріантної міри Лебега множини $E \in \mathcal{L}_m$ можна використовувати як формулу

$$\lambda_m(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda_m^{K_n}(E \cap K_n),$$

так і формулу

$$\lambda_m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_m^{Q_j}\left(E \cap Q_j\right),$$

де $\left\{Q_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ – куби в $\mathbb{R}^m$, які попарно не перетинаються, є зсувами куба $[-1;1) \times \ldots \times [-1;1)$ і дають в об'єднанні увесь простір $\mathbb{R}^m$ [2].

1.5 Диференціальні форми. Многовиди

Нехай V – довільний лінійний простір (будемо розглядати виключно простори над $\mathbb{R}$). Нехай $k \in \mathbb{N}$. k-кратний декартів добуток $V \times V \times ... \times V$ будемо позначати через V^k.

Означення 47. Функція $T: V^k \to \mathbb{R}$ називається полілінійною (k-лінійною), якщо для будь-якого $i \in \overline{1, k}$ виконано дві умови:

– $T(v_1, ..., v_i + v_{i'}, ..., v_k) = T(v_1, ..., v_i, ..., v_k) + T(v_1, ..., v_{i'}, ..., v_k)$ $\forall v_1, ..., v_i, v_{i'}, ..., v_k \in V$;

– $T(v_1, ..., av_i, ..., v_k) = aT(v_1, ..., v_i, ..., v_k)$ $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall v_1, ..., v_k \in V$.

Полілінійну функцію $T: V^k \to \mathbb{R}$ називають також k-тензором на V [17]. Множину всіх k-тензорів на V будемо позначати через $\mathcal{T}^k(V)$. Введемо на $\mathcal{T}^k(V)$ операції суми тензорів та множення тензора на дійсне число:

– сумою тензорів $S, T \in \mathcal{T}^k(V)$ будемо називати таке відображення $S + T: V^k \to \mathbb{R}$, що $(S + T)(v_1, ..., v_k) = S(v_1, ..., v_k) + T(v_1, ..., v_k)$ для всіх $v_1, ..., v_k \in V$;

– добутком тензора $S \in \mathcal{T}^k(V)$ на число $a \in \mathbb{R}$ будемо називати таке відображення $aS: V^k \to \mathbb{R}$, що $(aS)(v_1, ..., v_k) = a \cdot S(v_1, ..., v_k)$ для всіх $v_1, ..., v_k \in V$.

Легко бачити, що $\forall S, T \in \mathcal{T}^k(V)$: $S + T \in \mathcal{T}^k(V)$, а також $\forall S \in \mathcal{T}^k(V)$, $\forall a \in \mathbb{R}$: $aS \in \mathcal{T}^k(V)$. Відносно введених операцій суми та множення на дійсне число множина $\mathcal{T}^k(V)$ є лінійним простором над $\mathbb{R}$.

Означення 48 [17]. Нехай $S \in \mathcal{T}^k(V)$, $T \in \mathcal{T}^l(V)$. Тензорним добутком S на T називається відображення $S \otimes T: V^{k+l} \to \mathbb{R}$, яке визначається формулою

$$S \otimes T(v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_{k+l}) = S(v_1, ..., v_k) \cdot T(v_{k+1}, ..., v_{k+l}).$$

Зауваження 9. Ясно, що $S \otimes T \in \mathcal{T}^{k+l}(V)$ $\forall S \in \mathcal{T}^k(V)$, $\forall T \in \mathcal{T}^l(V)$. Крім того, операція тензорного добутку не є комутативною, тобто, взагалі кажучи, $S \otimes T \neq T \otimes S$.

Означення 49 [15]. Нехай (X, τ) – довільний топологічний лінійний простір. Множина усіх неперервних лінійних функціоналів, визначених на X, утворює лінійний простір за поточковими операціями суми функціоналів і добутку функціонала на число. Цей простір позначається X^* і називається спряженим простором до X (або простором, спряженим з X).

Зауваження 10. Нехай V – скінченновимірний лінійний простір. Тоді простір $\mathcal{T}^1(V)$ співпадає із простором V^*.

Означення 50. Нехай V – лінійний простір розмірності n; $\{v_1, \dots, v_n\}$ – базис V. Базис $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ простору V^* називається дуальним до базису $\{v_1, \dots, v_n\}$, якщо $\forall i, j \in \overline{1,n}$: $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера.

Теорема 7 [17]. Нехай $\{v_1, \dots, v_n\}$ – базис лінійного простору V; нехай $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ – дуальний базис спряженого простору. Тоді множина всіх тензорних добутків k-го порядку $\varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_k}$ $\left(i_1, \dots, i_k \in \overline{1,n}\right)$ є базисом простору $\mathcal{T}^k(V)$.

Наслідок 2. Якщо V – n-вимірний лінійний простір, то простір $\mathcal{T}^k(V)$ має розмірність n^k.

Нехай V, W – довільні лінійні простори; $f: V \to W$ – лінійне відображення. Побудуємо лінійне відображення $f^*: \mathcal{T}^k(W) \to \mathcal{T}^k(V)$, задавши його формулою $(f^*T)(v_1, \dots, v_k) = T\big(f(v_1), \dots, f(v_k)\big)$ для довільних $T \in \mathcal{T}^k(W)$ і $v_1, \dots, v_k \in V$. Можна перевірити, що $f^*(S \otimes T) = f^*S \otimes f^*T$.

Означення 51 [17]. Нехай V – лінійний простір, $k \in \mathbb{N}$. k-тензор $\omega \in \mathcal{T}^k(V)$ називається антисиметричним (кососиметричним), якщо $\omega\big(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k\big) = -\omega\big(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k\big)$ для довільних позицій $i \neq j$ і будь-яких $v_1, \dots, v_k \in V$ (у цій рівності аргументи v_i і v_j міняються місцями, а всі інші аргументи лишаються на місці). Множину усіх антисиметричних k-тензорів на V позначають через $\Lambda^k(V)$.

Твердження 12. $\Lambda^k(V)$ є лінійним підпростором простору $\mathcal{T}^k(V)$.

Доведення. Оскільки $\Lambda^k(V) \subset \mathcal{T}^k(V)$ та $\mathcal{T}^k(V)$ – лінійний простір, то достатньо показати, що $\forall \omega, \eta \in \Lambda^k(V)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $a\omega + b\eta \in \Lambda^k(V)$. Фіксуємо довільні позиції $i, j = \overline{1, k}$ та вектори $v_1, \ldots, v_k \in V$. Тоді в силу антисиметричності тензорів ω та η маємо рівність

$$(a\omega + b\eta)\big(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k\big) = -(a\omega + b\eta)\big(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_k\big).$$

Отже, справді $a\omega + b\eta \in \Lambda^k(V)$. ■

Зауваження 11. $\Lambda^1(V) = \mathcal{T}^1(V)$ для довільного лінійного простору V.

Нехай $T \in \mathcal{T}^k(V)$. Визначимо нове відображення $\operatorname{Alt}(T): V^k \to \mathbb{R}$ рівністю

$$\operatorname{Alt}(T)(v_1, \ldots, v_k) = \tfrac{1}{k!} \textstyle\sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \; T\big(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\big)$$

(див., наприклад, [17]). Тут S_k – множина усіх можливих підстановок чисел $1,2, \ldots, k$; $\operatorname{sgn} \sigma$ – знак підстановки σ (якщо σ – парна підстановка, то $\operatorname{sgn} \sigma = +1$; якщо σ – непарна, то $\operatorname{sgn} \sigma = -1$).

Теорема 8 [17]. Нехай V – лінійний простір, $k \in \mathbb{N}$. Тоді:

– якщо $T \in \mathcal{T}^k(V)$, то $\operatorname{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$;

– якщо $\omega \in \Lambda^k(V)$, то $\operatorname{Alt}(\omega) = \omega$;

– $\operatorname{Alt}\big(\operatorname{Alt}(T)\big) = \operatorname{Alt}(T)$.

Означення 52 [17]. Нехай $k, l \in \mathbb{N}$, $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$. Зовнішнім добутком тензора ω на тензор η називається відображення

$$\omega \wedge \eta = \tfrac{(k+l)!}{k!\, l!} \operatorname{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Із теореми 8 випливає, що $\omega \wedge \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$.

Теорема 9 [17]. Нехай V – лінійний простір, $k, l, m \in \mathbb{N}$. Тоді:

– якщо $S \in \mathcal{T}^k(V)$, $T \in \mathcal{T}^l(V)$ і $\mathrm{Alt}(S) = 0$, то

$$\mathrm{Alt}(S \otimes T) = \mathrm{Alt}(T \otimes S) = 0;$$

– $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \mathrm{Alt}\big(\omega \otimes \mathrm{Alt}(\eta \otimes \theta)\big)$;

– якщо $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$ і $\theta \in \Lambda^m(V)$, то

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!} \mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta \otimes \theta).$$

Теорема 10 [17]. Нехай $\{v_1, \ldots, v_n\}$ – базис лінійного простору V; нехай $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ – дуальний базис спряженого простору. Тоді:

– якщо $k > n$, то $\Lambda^k(V) = \{0\}$;

– якщо $k \leq n$, то множина зовнішніх добутків k-го порядку $\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n)$ є базисом простору $\Lambda^k(V)$. У цьому випадку $\dim \Lambda^k(V) = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Наслідок 3. Нехай V – лінійний простір розмірності n. Тоді $\dim \Lambda^n(V) = C_n^n = 1$, а значить, всі антисиметричні n-тензори на V є кратними будь-якого ненульового з них. Прикладом ненульового тензора з $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ є визначник det.

Означення 53 [17]. Нехай $p \in \mathbb{R}^n$. Множина $\{\langle p, v\rangle : v \in \mathbb{R}^n\}$ називається дотичним простором до $\mathbb{R}^n$ у точці p. Тут символ $\langle \cdot,\cdot \rangle$ означає деяку пару елементів. Позначення дотичного простору до $\mathbb{R}^n$ у точці p: $\mathbb{R}_p^n$ або $T_p\mathbb{R}^n$. Введемо на $\mathbb{R}_p^n$ операції таким чином:

$$\langle p, v\rangle + \langle p, w\rangle = \langle p, v + w\rangle,$$
$$a \cdot \langle p, v\rangle = \langle p, a \cdot v\rangle.$$

Відносно цих операцій $\mathbb{R}^n_p$ є n-вимірним лінійним простором. Стандартним базисом $\mathbb{R}^n_p$ будемо називати базис $\{\langle p, e_1\rangle, \dots, \langle p, e_n\rangle\}$, де $\{e_1, \dots, e_n\}$ – стандартний базис $\mathbb{R}^n$ (тобто у вектора e_i всі декартові координати нульові, окрім i-ої, яка дорівнює 1). На $\mathbb{R}^n_p$ природним чином вводиться скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_p$ за формулою $(\langle p, v\rangle, \langle p, w\rangle)_p = (v, w)$, де $(\cdot,\cdot)$ – канонічний скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$. Замість $\langle p, v\rangle$ часто пишуть v_p.

Означення 54 [17]. Відображення ω, яке кожній точці $p \in \mathbb{R}^n$ співставляє тензор $\omega(p) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n_p)$, називається диференціальною формою k-го степеня (або диференціальною k-формою) на $\mathbb{R}^n$.

Означення 55. Позначимо через $\{\varepsilon^1(p), \dots, \varepsilon^n(p)\}$ базис в $\left(\mathbb{R}^n_p\right)^* = \Lambda^1(\mathbb{R}^n_p)$, дуальний до базису $\{(e_1)_p, \dots, (e_n)_p\}$ в $\mathbb{R}^n_p$. Тоді, за теоремою 10,

$$\omega(p) = \sum_{i_1<\dots<i_k} \omega_{i_1\dots i_k}(p) \cdot \left(\varepsilon^{i_1}(p) \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_k}(p)\right).$$

Диференціальна k-форма ω на $\mathbb{R}^n$ називається неперервною на $\mathbb{R}^n$, якщо всі функції $\omega_{i_1\dots i_k} = \omega_{i_1\dots i_k}(p)$ є неперервними на $\mathbb{R}^n$. Аналогічно, кажуть, що диференціальна k-форма ω належить класу C^p $(p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$, якщо всі функції $\omega_{i_1\dots i_k}$ належать цьому класу.

Означення 56. Нехай $A \subset \mathbb{R}^m$. Множину A називають областю в $\mathbb{R}^m$, якщо A є відкритою зв'язною множиною (відносно стандартної топології на $\mathbb{R}^m$).

Означення 57. Нехай M – абстрактна непорожня множина; $k \in \mathbb{N}$. Нехай для кожної точки $x \in M$ існує підмножина $U \subset M$, що містить x, і взаємно однозначне відображення $\varphi: U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^k$ на область $\varphi(U)$ в $\mathbb{R}^k$. (Упорядковану пару (U, φ) за умови $x \in U \subset M$ називають картою в точці x). Нехай також виконується умова узгодженості карт, а саме: для будь-яких карт (U, φ) та (V, ψ) таких, що $U \cap V \neq \emptyset$, множини $\varphi(U \cap V)$ та $\psi(U \cap V)$ є відкритими в $\mathbb{R}^k$, а відображення $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ є неперервним відносно стандартної топології на $\mathbb{R}^k$. Тоді множину M назвемо неперервним многовидом розмірності k.

Означення 58 [16]. В умовах означення 57 набір попарно узгоджених карт $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ такий, що $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$, називається атласом многовида M. Простір $\mathbb{R}^k$ називають модельним простором многовида M.

Лема 5. Нехай X, Y, Z – абстрактні непорожні множини, $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ – бієктивні відображення. Тоді відображення $g \circ f: X \to Z$ також є бієкцією.

Доведення. Відображення $g \circ f$ є сюр'єктивним. Дійсно, оскільки $f(X) = Y$ та $g(Y) = Z$, то $(g \circ f)(X) = g\big(f(X)\big) = g(Y) = Z$. Покажемо ін'єктивність відображення $g \circ f$. Припустимо, що $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$, тобто $g\big(f(x)\big) = g\big(f(y)\big)$. Тоді, оскільки відображення g є ін'єктивним, отримуємо $f(x) = f(y)$. Водночас ін'єктивність відображення f приводить до отримання рівності $x = y$. Отже, $\big((g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)\big) \Rightarrow (x = y)$, що й означає ін'єктивність $g \circ f$. Посилання на те, що бієктивним відображенням називають відображення, яке є сюр'єкцією та ін'єкцією одночасно, завершує доведення леми. ■

Лема 6. Нехай виконані всі умови леми 5. Тоді $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Доведення. За лемою 5, $g \circ f$ є бієктивним відображенням, тому ми маємо право розглядати відображення $(g \circ f)^{-1}: Z \to X$. За означенням оберненого відображення, $x = (g \circ f)^{-1}(y)$ тоді й тільки тоді, коли $y = (g \circ f)(x)$, тобто $y = g\big(f(x)\big)$. Але $\Big(y = g\big(f(x)\big)\Big) \Leftrightarrow \big(g^{-1}(y) = f(x)\big) \Leftrightarrow \big(f^{-1}\big(g^{-1}(y)\big) = x\big)$. Отримали, що $x = (g \circ f)^{-1}(y)$ тоді й тільки тоді, коли $x = f^{-1}\big(g^{-1}(y)\big) = (f^{-1} \circ g^{-1})(y)$. Це й означає, що $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

Наслідок 4. Нехай M – неперервний многовид розмірності k; Ω – атлас многовида M; $(U, \varphi), (V, \psi) \in \Omega$; $U \cap V \neq \emptyset$. Тоді відображення $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ є гомеоморфізмом.

Доведення. За означенням 57, $\psi \circ \varphi^{-1}$ є неперервним відображенням. Крім того, оскільки $\varphi: U \cap V \to \varphi(U \cap V)$ та $\psi: U \cap V \to \psi(U \cap V)$ – бієкції, то й $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ є бієкцією (див. лему 5). Лишилося довести, що $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1}: \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$ є неперервним відображенням. Але, за лемою 6, $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} = (\varphi^{-1})^{-1} \circ \psi^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$, тому неперервність $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1}$ прямо випливає з означення 57. ■

Означення 59 [16]. Нехай M – абстрактна множина, що задовольняє усім умовам означення 57, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Нехай, крім того, для будь-яких карт (U, φ) та (V, ψ) таких, що $U \cap V \neq \emptyset$, відображення $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ належить класу $C^p(U \cap V)$. Тоді M називають диференційовним многовидом розмірності k класу C^p.

Виявляється, що на довільному неперервному многовиді M розмірності k (див. означення 57) можна коректно ввести топологію, породжену картами атласу многовида M. Нехай $\mathfrak{N}$ – сукупність усіх множин вигляду $\varphi^{-1}(W)$, де (U, φ) є картою атласу M, а W є відкритою підмножиною в $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^k$. Спочатку доведемо наступну лему.

Лема 7. $\mathfrak{N}$ є покриттям M.

Доведення. Ясно, що кожна множина з $\mathfrak{N}$ є підмножиною M. Для зручності запишемо $\mathfrak{N}$ у формі $\{V_\beta: \beta \in J\}$. Якщо $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha \in I\}$ – вихідний атлас на M, то ми знаємо: $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Зафіксуємо довільну карту $(U, \varphi) \in \Omega$. Оскільки $\varphi: U \to \varphi(U)$ – бієкція, то $\varphi^{-1}(\varphi(U)) = U$. Таким чином, $M = \bigcup_{\alpha \in I} \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha))$. Але при кожному $\alpha \in I$ маємо $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(U_\alpha)) \in \mathfrak{N}$, адже $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \varphi_\alpha(U_\alpha)$ і $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ є відкритою множиною в $\mathbb{R}^k$. Рівність $M = \bigcup_{\beta \in J} V_\beta$ доведено. ■

Оскільки $\mathfrak{N}$ є покриттям M, то сукупність $\mathfrak{M}$ усіх множин, які є скінченними перетинами множин із $\mathfrak{N}$, буде задовольняти критерію бази топології [14]. Топологія на M складатиметься з $\emptyset$ та всіх можливих (скінченних і нескінченних) об'єднань множин із $\mathfrak{M}$. Водночас сім'я $\mathfrak{N}$ стосовно введеної топології буде передбазою.

Наслідок 5. Нехай Ω – атлас многовида M. Тоді для довільної карти $(U, \varphi) \in \Omega$ множина U є відкритою в сенсі топології τ на M, передбазою якої є покриття $\mathfrak{N}$.

Доведення. У процесі доведення леми 7 було показано, що $U = \varphi^{-1}\big(\varphi(U)\big) \in \mathfrak{N}$ для довільної карти $(U, \varphi) \in \Omega$. Легко бачити, що всі множини, які належать передбазі топології, будуть належати базі цієї топології і самій топології. Тому $U \in \tau$. ■

Твердження 13. Нехай M – довільний неперервний многовид розмірності k, Ω – атлас многовиду M, $(V, \psi) \in \Omega$. Нехай τ – топологія на M, породжена покриттям $\mathfrak{N}$, яке складається з усіх множин вигляду $\varphi^{-1}(W)$, де $(U, \varphi) \in \Omega$, а W є відкритою підмножиною в $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^k$. Нехай τ_V – топологія на V, успадкована з M (див. означення 14), а $\theta_{\psi(V)}$ – топологія на $\psi(V)$, індукована стандартною топологією на $\mathbb{R}^k$. Тоді відображення $\psi: V \to \psi(V)$ є неперервним відносно топології τ_V на V та топології $\theta_{\psi(V)}$ на $\psi(V)$.

Доведення. Хочемо перевірити, що $\psi: (V, \tau_V) \to \big(\psi(V), \theta_{\psi(V)}\big)$ задовольняє означенню неперервного відображення топологічних просторів (див. означення 11). Візьмемо довільну множину $W \in \theta_{\psi(V)}$. Тоді W належить стандартній топології $\mathbb{R}^k$, адже $W = \psi(V) \cap E$, де E та $\psi(V)$ – відкриті підмножини $\mathbb{R}^k$. Множина $\psi^{-1}(W)$ належить сім'ї $\mathfrak{N}$ (за побудовою $\mathfrak{N}$). Але тоді $\psi^{-1}(W) \in \mathfrak{M}$, адже $\psi^{-1}(W) = \bigcap_{k=1}^{1} A_k$, де $A_1 = \psi^{-1}(W) \in \mathfrak{N}$. Водночас $\psi^{-1}(W) = \bigcup_{k=1}^{1} B_k$, де $B_1 = \psi^{-1}(W) \in \mathfrak{M}$, тому $\psi^{-1}(W) \in \tau$. А оскільки $\psi^{-1}(W) \subset V$ і τ_V – топологія на V, успадкована з M, то $\psi^{-1}(W) \in \tau_V$, що й завершує доведення твердження. ■

Зауваження 12 [16]. Нехай M – неперервний многовид розмірності k. Нехай на M накладена додаткова умова: для кожної пари точок $x_1, x_2 \in M$ таких, що $x_1 \neq x_2$, існують карти (U_1, φ_1) і (U_2, φ_2) такі, що виконані наступні умови:

– $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$;

– $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Тоді топологічний простір (M, τ), де τ – топологія на M, породжена покриттям $\mathfrak{N}$, є хаусдорфовим. Дійсно, згідно з означенням 10, достатньо перевірити, що U_1 та U_2 є околами x_1 і x_2 відповідно. Але U_1 та U_2 є відкритими множинами (див. наслідок 5). Відкрита множина, яка містить точку, звісно, є околом цієї точки (див. означення 9). Тому U_1 – окіл x_1, U_2 – окіл x_2, і простір (M, τ) – хаусдорфів.

1.6 Висновки за розділом 1

Таким чином, у розділі 1 наведено теоретичні відомості, необхідні для дослідження проблеми побудови асоційованих мір поверхонь, вкладених як у скінченновимірний лінійний простір, так і в абстрактний многовид. Залучено потужний апарат топологічних просторів, який, з-поміж іншого, дозволяє ввести найбільш загальне поняття неперервності відображень. Показано зв'язок між метричними та топологічними просторами. Досліджено властивості довільних алгебр та σ-алгебр множин. Наведено поняття заряду та міри на вимірному просторі. Коротко викладено одну із декількох еквівалентних конструкцій інтеграла Лебега, необхідну для формулювання теореми Радона–Нікодима. Вказано деякі властивості абсолютно неперервних зарядів і мір. Стисло наведено схему побудови інваріантної міри Лебега у скінченновимірному просторі. Послідовно викладено матеріал, пов'язаний із диференціальними формами та диференційовними многовидами, необхідний для дослідження деяких методів побудови поверхневих мір у просторах довільної розмірності.

2 РОЗРОБКА УЗАГАЛЬНЕННЯ КЛАСИЧНОЇ СХЕМИ ПОБУДОВИ ПОВЕРХНЕВИХ МІР

2.1 Різні способи формалізації поняття поверхні

Перш ніж будувати конструкцію поверхневої міри, доцільно вказати, що ми будемо розуміти під поверхнею в $\mathbb{R}^m$ (m – довільне натуральне число).

Означення 60 [1]. Нехай $S \subset \mathbb{R}^m$; $k \in \mathbb{N}$, $k \leq m$. Нехай $\forall x \in S$ існує $U(x) \subset \mathbb{R}^m$ – такий відкритий окіл (див. означення 9) точки x в $\mathbb{R}^m$, що множина $U_S(x) \coloneqq S \cap U(x)$ є гомеоморфною $\mathbb{R}^k$. Тоді множину S називають поверхнею розмірності k (або k-вимірною поверхнею) в $\mathbb{R}^m$.

Зауваження 13. Означення 60 потребує уточнення, про які топології на $U_S(x)$ та $\mathbb{R}^k$ йдеться. Нехай $S \subset \mathbb{R}^m$. Щоб S можна було називати k-вимірною поверхнею в $\mathbb{R}^m$, для будь-якої точки $x \in S$ має існувати гомеоморфізм $\varphi: (U_S(x), \theta_U) \to \left(\mathbb{R}^k, \tau_\rho\right)$, де θ_U – топологія на $U_S(x)$, індукована стандартною топологією на $\mathbb{R}^m$. Водночас τ_ρ – стандартна топологія на $\mathbb{R}^k$ (див. означення 19).

Твердження 14. Нехай $S \subset \mathbb{R}^m$ – k-вимірна поверхня в $\mathbb{R}^m$. Тоді S є неперервним многовидом розмірності k (див. означення 57).

Доведення. Фіксуємо довільну точку $x \in S$. Тоді, за означенням 60, існує множина $U_S(x) \subset S$, що містить x, та взаємно однозначне відображення (навіть гомеоморфізм) $\varphi: U_S(x) \to \varphi\left(U_S(x)\right)$, де $\varphi\left(U_S(x)\right) = \mathbb{R}^k$. Ясно, що $\mathbb{R}^k$ є відкритою множиною в $\mathbb{R}^k$. Тому залишилося перевірити, що виконується умова узгодженості карт. Беремо довільні карти $(U_S(x), \varphi)$, $(V_S(y), \psi)$ такі, що $U_S(x) \cap V_S(y) \neq \emptyset$ (тут x, y – якісь точки S). Оскільки $U_S(x) = S \cap U(x)$, $V_S(y) = S \cap V(y)$, $U(x)$ та $V(y)$ – відкриті множини в $\mathbb{R}^m$, то $U_S(x), V_S(y) \in \tau_S$, де τ_S – топологія на S, успадкована з $\mathbb{R}^m$. Тоді також виконано $U_S(x) \cap V_S(y) \in \tau_S$. Гомеоморфізм переводить відкриті множини у відкриті, тому множини $\varphi\left(U_S(x) \cap V_S(y)\right)$ та $\psi\left(U_S(x) \cap V_S(y)\right)$ є відкритими в $\mathbb{R}^k$. Розглянемо відображення $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi\big(U_S(x) \cap V_S(y)\big) \to \psi\big(U_S(x) \cap V_S(y)\big)$. Відображення ψ та φ^{-1} є неперервними, адже ψ і φ – гомеоморфізми. Композиція неперервних відображень є неперервним відображенням (див. твердження 5). Отже, всі карти є попарно узгодженими, тому твердження доведено. ■

Лема 8. Нехай (X, τ), (Y, θ), (Z, υ) – топологічні простори, $f: X \to Y$ та $g: Y \to Z$ – гомеоморфізми. Тоді відображення $g \circ f: X \to Z$ також є гомеоморфізмом.

Доведення. Крок 1. Те, що $g \circ f$ є взаємно однозначним відображенням X на Z, уже доведено в лемі 5.

Крок 2. Відображення $g \circ f: X \to Z$ є неперервним, адже воно є композицією неперервних відображень f та g (див. твердження 5).

Крок 3. Доведемо, що відображення $(g \circ f)^{-1}: Z \to X$ є неперервним. За лемою 6, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Оскільки f – гомеоморфізм, то $f^{-1}: Y \to X$ є неперервним відображенням. Аналогічно, $g^{-1}: Z \to Y$ – неперервне. Знову за твердженням 5 отримуємо, що $f^{-1} \circ g^{-1}$ – неперервне відображення. ■

Наслідок 6. Із леми 8 випливає, що в означенні 60 $\mathbb{R}^k$ можна замінити на будь-який топологічний простір, який є гомеоморфним $\mathbb{R}^k$.

Означення 61. Нехай X – лінійний простір. Норми $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ на X називаються еквівалентними, якщо існують числа $a, b > 0$ такі, що $a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le b\|x\|_1$ для всіх точок $x \in X$. Факт еквівалентності норм $\|\cdot\|_1$ та $\|\cdot\|_2$ позначають так: $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

Твердження 15. Нехай X – довільний скінченновимірний лінійний простір. Нехай $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ – будь-які норми на X. Тоді ці норми породжують на X однакові метричні топології.

Доведення. Як відомо, у скінченновимірному просторі будь-які дві норми є еквівалентними [18]. Тобто $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$ (див. означення 61). Нехай $a, b > 0$ – числа з означення 61 еквівалентних норм. Введемо позначення: τ_1 – топологія на X, індукована метрикою ρ_1, де $\rho_1(x, y) = \|x - y\|_1$; τ_2 – топологія на X, індукована метрикою ρ_2, де $\rho_2(x, y) = \|x - y\|_2$. Візьмемо довільну множину U

з τ_1. Якщо $U = \emptyset$, то, очевидно, $U \in \tau_2$. Припустимо тепер, що $U \neq \emptyset$. Для кожної точки $x \in U$ візьмемо кулю

$$B^1(x, \varepsilon_x) = \{y \in X: \rho_1(y, x) < \varepsilon_x\} = \{y \in X: \|y - x\|_1 < \varepsilon_x\}$$

таку, що $x \in B^1(x, \varepsilon_x) \subset U$ та $\varepsilon_x > 0$. Це можливо зробити в силу твердження 7. Тоді, очевидно, $U = \bigcup_{x \in U} B^1(x, \varepsilon_x)$. Зафіксуємо точку $x \in U$. Припустимо, що $y \in B^2(x, a\varepsilon_x)$, тобто $\|y - x\|_2 < a\varepsilon_x$. Тоді

$$\|y - x\|_1 \leq \frac{1}{a} \|y - x\|_2 < \varepsilon.$$

Отже, ми показали, що при будь-якому $x \in U$ куля $B^2(x, a\varepsilon_x)$ вкладена в кулю $B^1(x, \varepsilon_x)$. Значить, $U = \bigcup_{x \in U} B^2(x, a\varepsilon_x)$. Але всі кулі вигляду $B^2(x, a\varepsilon_x)$ належать базі топології τ_2, отже, $U \in \tau_2$. Таким чином, ми довели, що $\tau_1 \subset \tau_2$. Цілком аналогічними міркуваннями можна отримати, що $\tau_1 \supset \tau_2$. Остаточний висновок: $\tau_1 = \tau_2$. ∎

Твердження 16. Нехай X – довільний скінченновимірний лінійний простір. Нехай $\|\cdot\|_{X1}$, $\|\cdot\|_{X2}$ – будь-які норми на X. Позначимо через τ_i метричну топологію на X, породжену нормою $\|\cdot\|_{Xi}$ $(i \in \{1,2\})$. Нехай також Y – довільний скінченновимірний лінійний простір. Нехай $\|\cdot\|_{Y1}$, $\|\cdot\|_{Y2}$ – будь-які норми на Y. Позначимо через θ_i метричну топологію на Y, породжену нормою $\|\cdot\|_{Yi}$ $(i \in \{1,2\})$. Тоді: якщо відображення $f: (X, \tau_1) \to (Y, \theta_1)$ – неперервне, то і відображення $f: (X, \tau_2) \to (Y, \theta_2)$ є неперервним.

Доведення. Нехай відомо, що відображення $f: (X, \tau_1) \to (Y, \theta_1)$ – неперервне. Візьмемо довільну відкриту множину $U \in \theta_2$. За твердженням 15, $\theta_2 = \theta_1$, тому $U \in \theta_1$. Тоді $f^{-1}(U) \in \tau_1$. Знову користуємося твердженням 15 і отримуємо $\tau_1 = \tau_2$, звідки $f^{-1}(U) \in \tau_2$. Це і доводить неперервність відображення $f: (X, \tau_2) \to (Y, \theta_2)$ за означенням. ∎

Лема 9. Нехай $(X, \|\cdot\|)$ – довільний нормований простір; $f: X \to \mathbb{R}$ – функція, що діє на правилом: $f: x \mapsto f(x) := \|x\|$. Тоді f є неперервною функцією відносно топології на X, породженої нормою $\|\cdot\|$.

Доведення. Нехай $x_n, x_0 \in X$, $x_n \to x_0$ за нормою $\|\cdot\|$, тобто $\|x_n - x_0\| \to 0$. Тоді $|f(x_n) - f(x_0)| = |\|x_n\| - \|x_0\|| \leq \|x_n - x_0\| \to 0$, що й доводить неперервність функції f. ■

Твердження 17. Нехай $\|\cdot\|: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ – будь-яка норма на $\mathbb{R}^k$; $\rho: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ – метрика, породжена нормою $\|\cdot\|$, тобто $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^k$. Тоді куля $B(\vec{0}, 1) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k: \rho(\vec{x}, \vec{0}) < 1\}$ гомеоморфна $\mathbb{R}^k$ (на кулі $B(\vec{0}, 1)$ та у просторі $\mathbb{R}^k$ береться топологія, індукована метрикою ρ).

Доведення. Розглянемо відображення $\vec{f}: \mathbb{R}^k \to B(\vec{0}, 1)$, яке діє за правилом $\vec{f}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{1+\|\vec{x}\|}$, та відображення $\vec{g}: B(\vec{0}, 1) \to \mathbb{R}^k$, задане рівністю $\vec{g}(\vec{y}) = \frac{\vec{y}}{1-\|\vec{y}\|}$ (формули цих відображень запозичені з книги [19], де вони наведені для часткового випадку – евклідової норми на $\mathbb{R}^k$). Перевіримо коректність введення відображення $\vec{f}$, а саме: пересвідчимося, що $\vec{f}(\vec{x}) \in B(\vec{0}, 1)$ $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k$. Справді, $\rho(\vec{f}(\vec{x}), \vec{0}) = \left\|\frac{\vec{x}}{1+\|\vec{x}\|} - \vec{0}\right\| = \frac{\|\vec{x}\|}{1+\|\vec{x}\|} < 1$, адже $\|\vec{x}\| < 1 + \|\vec{x}\|$ для будь-якого вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$. Також перевіряється коректність запровадження відображення $\vec{g}$ (тут слід зрозуміти, що $\forall \vec{y} \in B(\vec{0}, 1)$ вираз $1 - \|\vec{y}\|$ не обертається в 0, але це взагалі очевидно). Відображення $\vec{f}$ та $\vec{g}$ є неперервними на своїх областях визначення, бо вони є композиціями неперервних відображень (див., зокрема, лему 9). Якщо нам вдасться показати, що відображення $\vec{f}$ і $\vec{g}$ є взаємно оберненими, то буде доведено, що $\vec{f}$ і $\vec{g}$ є гомеоморфізмами. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k$:

$$\vec{g}\left(\vec{f}(\vec{x})\right) = \frac{\frac{\vec{x}}{1 + \|\vec{x}\|}}{1 - \left\|\frac{\vec{x}}{1 + \|\vec{x}\|}\right\|} = \frac{\vec{x}}{1 + \|\vec{x}\| - \|\vec{x}\|} = \vec{x}.$$

Таким чином, $\vec{g} \circ \vec{f} = id$. Водночас $\forall \vec{y} \in B(\vec{0}, 1)$:

$$\vec{f}(\vec{g}(\vec{y})) = \frac{\dfrac{\vec{y}}{1 - \|\vec{y}\|}}{1 + \left\| \dfrac{\vec{y}}{1 - \|\vec{y}\|} \right\|} = \frac{\vec{y}}{1 - \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|} = \vec{y}.$$

Отже, $\vec{f} \circ \vec{g} = id$. А одночасне виконання рівностей $\vec{g} \circ \vec{f} = id$ і $\vec{f} \circ \vec{g} = id$ гарантує, що відображення $\vec{f}, \vec{g}$ є бієктивними і $\vec{g} = \vec{f}^{-1}$. ■

Лема 10. Відображення $\| \cdot \|: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, задане рівністю $\|\vec{x}\| = \max\limits_{i=\overline{1,k}} |x_i|$, є нормою на $\mathbb{R}^k$.

Доведення. Невід'ємність відображення $\| \cdot \|$ очевидна. Якщо $\vec{x} = \vec{0}$, то $x_i = |x_i| = 0 \ \forall i = \overline{1,k}$, тому $\|\vec{x}\| = 0$. Навпаки, нехай $\|\vec{x}\| = \max\limits_{i=\overline{1,k}} |x_i| = 0$ для деякого $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$. Тоді $|x_i| = 0 \ \forall i = \overline{1,k}$, а значить, $\vec{x} = \vec{0}$. Отже, відображення $\| \cdot \|$ задовольняє аксіомі невиродженості норми. Нехай $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$. Тоді $\|\lambda \cdot \vec{x}\| = \max\limits_{i=\overline{1,k}} |\lambda \cdot x_i| = \max\limits_{i=\overline{1,k}} |\lambda| \cdot |x_i|$. Покажемо, що $\max\limits_{i=\overline{1,k}} |\lambda| \cdot |x_i| = |\lambda| \cdot \max\limits_{i=\overline{1,k}} |x_i|$. При $\lambda = 0$ це очевидно. При $\lambda \neq 0$ маємо $|\lambda| \cdot |x_j| = \max\limits_{i=\overline{1,k}} |\lambda| \cdot |x_i|$ тоді й тільки тоді, коли $\forall i = \overline{1,k}: |\lambda| \cdot |x_i| \leq |\lambda| \cdot |x_j|$ тоді й тільки тоді, коли $\forall i = \overline{1,k}: |x_i| \leq |x_j|$ тоді й тільки тоді, коли $|x_j| = \max\limits_{i=\overline{1,k}} |x_i|$ тоді й тільки тоді, коли $|\lambda| \cdot |x_j| = |\lambda| \cdot \max\limits_{i=\overline{1,k}} |x_i|$. Отримуємо, що

$$\|\lambda \cdot \vec{x}\| = \max_{i=\overline{1,k}} |\lambda \cdot x_i| = |\lambda| \cdot \max_{i=\overline{1,k}} |x_i| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\| \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k.$$

Залишилося довести, що для $\| \cdot \|$ виконується нерівність трикутника. Фіксуємо довільні точки $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^k$. $\|\vec{x} + \vec{y}\| = \max\limits_{i=\overline{1,k}} |x_i + y_i|$. Зрозуміло, що для будь-якого $j \in \overline{1,k}$ виконано

$$|x_j + y_j| \le |x_j| + |y_j| \le \max_{i=\overline{1,k}} |x_i| + \max_{i=\overline{1,k}} |y_i| = \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|.$$

Тому й $\max_{j=\overline{1,k}} |x_j + y_j| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. Отримали бажану нерівність $\|\vec{x} + \vec{y}\| \le \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. ■

Твердження 18. Відкритий куб $I^k = \{\vec{t} \in \mathbb{R}^k : |t_i| < 1 \ \forall i = \overline{1,k}\}$ гомеоморфний $\mathbb{R}^k$ при будь-якому $k \in \mathbb{N}$.

Доведення. Введемо на $\mathbb{R}^k$ метрику ρ, породжену нормою $\|\cdot\|$ з леми 10. Тоді $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \max_{i=\overline{1,k}} |x_i - y_i|$. Виявляється, що у цій метриці куля $B(\vec{0}, 1)$ співпадає з кубом I^k. Дійсно,

$$B(\vec{0}, 1) \coloneqq \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \rho(\vec{x}, \vec{0}) < 1\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^k : \|\vec{x}\| < 1\}.$$

Але $(\|\vec{x}\| < 1) \Leftrightarrow \left(\max_{i=\overline{1,k}} |x_i| < 1\right) \Leftrightarrow \left(|x_i| < 1 \ \forall i = \overline{1,k}\right)$. Отже, $I^k = B(\vec{0}, 1)$. Тоді, за твердженням 17, куб I^k є гомеоморфним $\mathbb{R}^k$, причому у твердженні 17 навіть наведено конкретну формулу даного гомеоморфізму. Однак варто зауважити, що твердження 17 встановлює гомеоморфність відповідного відображення відносно топології, породженої тією ж нормою, що й куля $B(\vec{0}, 1)$. Тобто ми довели, що куб I^k гомеоморфний $\mathbb{R}^k$ за топологією, індукованою метрикою $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \max_{i=\overline{1,k}} |x_i - y_i|$. Але із твердження 15 та твердження 16 випливає, що насправді куб I^k гомеоморфний $\mathbb{R}^k$ за топологією, індукованою довільною нормою на I^k, зокрема, евклідовою. ■

Означення 62 [1]. Нехай $S \subset \mathbb{R}^m$ – k-вимірна поверхня в $\mathbb{R}^m$. Поверхня S називається елементарною, якщо вона не тільки локально, а й глобально є гомеоморфною $\mathbb{R}^k$ (тобто всю поверхню S можна задати однією картою).

Наприклад, графік неперервної функції $f: I^k \to \mathbb{R}$ є елементарною k-вимірною поверхнею в $\mathbb{R}^{k+1}$.

Означення 63 ([20], [1]). Нехай $S \subset \mathbb{R}^m$. Нехай для кожної точки $x_0 \in S$ знайдуться її відкритий окіл $U(x_0)$ в $\mathbb{R}^m$ та дифеоморфізм $\psi: U(x_0) \to I^m = \{\vec{t} \in \mathbb{R}^m: |t_i| < 1, i = \overline{1,m}\}$, при якому множина $U_S(x_0) \coloneqq S \cap U(x_0)$ переходить у множину $I^m \cap \{\vec{t} \in \mathbb{R}^m: t_{k+1} = \cdots = t_m = 0\}$. Тоді S називається гладкою k-вимірною поверхнею в $\mathbb{R}^m$.

Зафіксуймо довільне натуральне число m. Якщо не сказано про інше, вважається, що m – таке натуральне число, що $k \leq m$. Далі в роботі будемо здебільшого працювати з поверхнями, які задовольняють наступному означенню.

Означення 64. Нехай $D \subset \mathbb{R}^k$ – вимірна за Жорданом множина; $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^m$ – таке відображення, що $\vec{r} \in C^1(D; \mathbb{R}^m)$, а також $rang\ \vec{r}'(\vec{u}) = k$ в усіх точках $\vec{u} \in D$. Тоді множину $\vec{r}(D)$ будемо називати гладкою k-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$. Водночас відображення $\vec{r}$ називають параметризацією цієї поверхні.

Твердження 19. Нехай $S \subset \mathbb{R}^m$. Тоді умови а) та б) еквівалентні:

а) S є гладкою k-вимірною поверхнею в сенсі означення 63;

б) S є поверхнею розмірності k згідно з означенням 60; всі карти атласу поверхні S є відображеннями класу C^1 і в кожній точці області свого визначення мають ранг k.

Доведення цього твердження можна знайти в підручнику [1] на с. 196–198. ■

Наслідок 7. Якщо $D \subset \mathbb{R}^k$ – жорданова множина, дифеоморфна $\mathbb{R}^k$, $S = \vec{r}(D)$ – гладка k-вимірна елементарна поверхня в $\mathbb{R}^m$ згідно з введеним нами означенням 64 і $\vec{r}: D \to S$ – гомеоморфізм, то мають місце два факти:

а) S є гладкою k-вимірною поверхнею в сенсі означення 63;

б) S є елементарною поверхнею в сенсі означення 62.

Доведення. Покажемо, що виконується факт а). Для цього достатньо показати, що має місце факт б) із формулювання твердження 19. Нехай $\vec{F}: \mathbb{R}^k \to D$ – дифеоморфізм (принаймні класу C^1), існування якого гарантується умовою даного наслідку. Тоді відображення $\vec{\varphi} \coloneqq \vec{r} \circ \vec{F}: \mathbb{R}^k \to S$ належить класу $C^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ і є гомеоморфізмом (див. лему 8). Таким чином, кожна точка $\vec{x}$ множини S має в S окіл $U_S(\vec{x}) \coloneqq S$, гомеоморфний простору $\mathbb{R}^k$. Отже, S є поверхнею розмірності k згідно з означенням 60. Атлас поверхні S складається з однієї карти, якою є відображення $\vec{\varphi}: \mathbb{R}^k \to S$. Лишилося зрозуміти, що $rang\, \vec{\varphi}'(\vec{u}) = k$ в усіх точках $\vec{u} \in \mathbb{R}^k$. Ми знаємо, що $rang\, \vec{r}'(\vec{y}) = k\ \forall \vec{y} \in D$. Оскільки $\vec{F}: \mathbb{R}^k \to D$ – дифеоморфізм, то $\vec{F}$ має неперервно диференційовне обернене відображення. Із цього випливає, що матриця $\vec{F}'(\vec{u})$ є невиродженою, а отже, $rang\, \vec{F}'(\vec{u}) = k$. Для кожної точки $\vec{u} \in \mathbb{R}^k$ виконується рівність

$$\vec{\varphi}'(\vec{u}) = \vec{r}'\left(\vec{F}(\vec{u})\right) \cdot \vec{F}'(\vec{u}).$$

За відомим фактом із лінійної алгебри, ранг добутку матриць не перевищує ранг кожного із множників, а якщо один із множників – невироджена квадратна матриця, то ранг добутку матриць дорівнює рангу другої матриці. Отже,

$$rang\, \vec{\varphi}'(\vec{u}) = rang\, \vec{r}'\left(\vec{F}(\vec{u})\right) = k.$$

Тепер доведемо, що має місце факт б). Всю поверхню S можна задати однією картою $\vec{\varphi} \coloneqq \vec{r} \circ \vec{F}: \mathbb{R}^k \to S$, яка є гомеоморфізмом. Отже, S є елементарною поверхнею. ■

Наостанок розглянемо ще одне означення поверхні, яке нам знадобиться у розділі 3 для викладення альтернативної конструкції поверхневої міри.

Означення 65 [12]. Нехай $m \in \mathbb{N}$, $S \subset \mathbb{R}^m$, $k < m$. Якщо існує зв'язна множина $D \subset \mathbb{R}^{m-k}$, відкритий окіл нуля $V \subset \mathbb{R}^k$, відкрита множина $W \subset \mathbb{R}^m$ і

C_b^2-дифеоморфізм $\vec{g}: D \times V \to W$, для якого $\vec{g}\left(D \times \{\vec{0}\}\right) = S$, то множину S називають вкладеною в $\mathbb{R}^m$ поверхнею корозмірності k.

Твердження 20. Нехай $S \subset \mathbb{R}^m$ – поверхня корозмірності k згідно з означенням 65. Нехай $\vec{g}: D \times V \to W$ – відповідний дифеоморфізм. І нехай множина D є вимірною за Жорданом. Тоді S є гладкою (m-k)-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$ (див. означення 64), якщо в якості параметризації S взяти відображення $\vec{r}: D \ni (u_1, \dots, u_{m-k})^T \mapsto \vec{g}(u_1, \dots, u_{m-k}, 0, \dots, 0) \in S$.

Доведення. Умова $\vec{r}(D) = S$ виконана, адже $\vec{r}(D) = g\left(D \times \{\vec{0}\}\right)$ і $g\left(D \times \{\vec{0}\}\right) = S$ за означенням поверхні корозмірності k. Помітимо, що

$$\vec{r} = \vec{g} \circ \vec{\imath}_m,$$

де $\vec{\imath}_m$ – лінійне відображення, яке кожній точці $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{m-k})^T \in \mathbb{R}^{m-k}$ співставляє $\vec{\imath}_m(\vec{x}) \coloneqq (x_1, \dots, x_{m-k}, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^m$. Легко бачити, що $\vec{\imath}'_m(\vec{z}) = \begin{pmatrix} I_{m-k} \\ \Omega \end{pmatrix}$ у кожній точці $\vec{z} \in \mathbb{R}^{m-k}$ (тут I_{m-k} – одинична матриця розмірності $(m-k) \times (m-k)$; Ω – нульова матриця розмірності $k \times (m-k)$). У кожній точці $\vec{u} \in D$ виконується рівність $\vec{r}'(\vec{u}) = \vec{g}'\left(\vec{\imath}_m(\vec{u})\right) \cdot \vec{\imath}'_m(\vec{u})$. Отже, $\vec{r}'(\vec{u}) = \vec{g}'(u_1, \dots, u_{m-k}, 0, \dots, 0) \cdot \begin{pmatrix} I_{m-k} \\ \Omega \end{pmatrix} = \left(\dot{g}_1\left(\vec{\imath}_m(\vec{u})\right) \quad \dots \quad \dot{g}_{m-k}\left(\vec{\imath}_m(\vec{u})\right)\right)$, де $\dot{g}_1\left(\vec{\imath}_m(\vec{u})\right), \dots, \dot{g}_{m-k}\left(\vec{\imath}_m(\vec{u})\right)$ – перші m-k стовпців матриці $\vec{g}'(u_1, \dots, u_{m-k}, 0, \dots, 0)$. Із цього випливає, що $\vec{r} \in C^1(D; \mathbb{R}^m)$. Крім того, оскільки $\vec{g}: D \times V \to W$ – дифеоморфізм, то існує обернене відображення $\vec{g}^{-1}$, яке є гладким. Тому у кожній точці $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \in D \times V$ матриця Якобі $\vec{g}'(\vec{u}, \vec{v})$ є невиродженою. Отже, стовпці матриці $\vec{g}'(\vec{u}, \vec{v})$ утворюють лінійно незалежну систему векторів. Тому при будь-якому $\vec{u} \in D$ стовпці матриці $\vec{r}'(\vec{u})$ теж є лінійно незалежними. Таким чином, $rang\, \vec{r}'(\vec{u}) = m - k \ \forall \vec{u} \in D$. Посилання на те, що множина $D \subset \mathbb{R}^{m-k}$ є жордановою за умовою, завершує доведення твердження. ■

Твердження 21. В умовах твердження 20 для всіх точок $\vec{x} \in S$ виконується рівність $\vec{r}'\left(\pi_{m-k}\left(\vec{g}^{-1}(\vec{x})\right)\right)(\mathbb{R}^{m-k}) = \vec{g}'\left(\vec{g}^{-1}(\vec{x})\right)\left(\mathbb{R}^{m-k} \times \{\vec{0}\}\right)$, де π_{m-k} – оператор проектування вектора на перші m-k координат.

Доведення. Зафіксуємо довільну точку $\vec{x} \in S$. Достатньо перевірити, що $\vec{r}'\left(\pi_{m-k}\left(\vec{g}^{-1}(\vec{x})\right)\right) \cdot \vec{\xi} = \vec{g}'\left(\vec{g}^{-1}(\vec{x})\right) \cdot \vec{\imath}_m\left(\vec{\xi}\right)$ для кожної точки $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^{m-k}$. Оскільки $\vec{x} \in S$, то $\vec{g}^{-1}(\vec{x}) = \langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = \vec{\imath}_m(\vec{u})$, де $\vec{u} \in D$, $\vec{0} \in \mathbb{R}^k$. Таким чином, хочемо довести рівність $\vec{r}'(\vec{u}) \cdot \vec{\xi} = \vec{g}'\left(\vec{\imath}_m(\vec{u})\right) \cdot \vec{\imath}_m\left(\vec{\xi}\right)$ для всіх $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^{m-k}$. Останні k стовпців матриці $\vec{g}'\left(\vec{\imath}_m(\vec{u})\right)$ не впливають на добуток $\vec{g}'\left(\vec{\imath}_m(\vec{u})\right) \cdot \vec{\imath}_m\left(\vec{\xi}\right)$, адже останні k координат вектора $\vec{\imath}_m\left(\vec{\xi}\right)$ є нульовими. Тому

$$\vec{g}'\left(\vec{\imath}_m(\vec{u})\right) \cdot \vec{\imath}_m\left(\vec{\xi}\right) = \left(\dot{g}_1\left(\vec{\imath}_m(\vec{u})\right) \quad \dots \quad \dot{g}_{m-k}\left(\vec{\imath}_m(\vec{u})\right)\right) \cdot \vec{\xi}.$$

Але у доведенні твердження 20 показано, що $\left(\dot{g}_1\left(\vec{\imath}_m(\vec{u})\right) \quad \dots \quad \dot{g}_{m-k}\left(\vec{\imath}_m(\vec{u})\right)\right)$ співпадає з $\vec{r}'(\vec{u})$. Отже, твердження доведено. ■

Твердження 21 показує, що множина $\vec{g}'\left(\vec{g}^{-1}(\vec{x})\right)\left(\mathbb{R}^{m-k} \times \{\vec{0}\}\right)$ є дотичним простором до поверхні S у точці $\vec{x} \in S$.

2.2 Класична конструкція площі (об’єму) поверхні

Означення 66. Нехай $S \coloneqq \vec{r}(D)$ – гладка k-вимірна елементарна поверхня в $\mathbb{R}^m$ (див. означення 64). Класичною поверхневою мірою S будемо називати число

$$\sigma_k(S) \coloneqq \int_D \sqrt{\det \Gamma_{\vec{u}}}\, du_1 \dots du_k, \tag{1}$$

де $\Gamma_{\vec{u}}$ – матриця Грама системи векторів $\{\dot{r}_1(\vec{u}), \dots, \dot{r}_k(\vec{u})\}$; $\dot{r}_i(\vec{u})$ – i-ий стовпець матриці $\vec{r}\,'(\vec{u})$.

Зауваження 14. Означення 66 є коректним лише в тому разі, коли інтеграл у формулі (1) існує. Зокрема він існує, якщо D – вимірна за Жорданом область в $\mathbb{R}^k$ і $\vec{r} \in C^1(\overline{D}; \mathbb{R}^m)$ [1].

Класична конструкція k-вимірного об'єму поверхні, вказана в означенні 66, базується на факті, відомому з лінійної алгебри [21]: квадрат об'єму паралелепіпеда, натягнутого на вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$, дорівнює $\det G$, де $G = \left(\left(\vec{v}_i, \vec{v}_j\right)\right)_{i.j=\overline{1,k}}$ – матриця Грама системи векторів $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$.

Означення 67. Нехай S – гладка k-вимірна елементарна поверхня в $\mathbb{R}^m$. Параметризації $\vec{r}_1 \colon D_1 \to S$ та $\vec{r}_2 \colon D_2 \to S$ поверхні S будемо називати еквівалентними, якщо існує дифеоморфізм $\vec{F} \colon D_1 \to D_2$, для якого $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \circ \vec{F}$.

Можна узагальнити результат, наведений у [16], й отримати таке твердження: якщо $S \coloneqq \vec{r}(D)$ – гладка k-вимірна елементарна поверхня в $\mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^k$ – відкрита множина, $\overline{D} \subset U, \vec{r} \in C^1(U; \mathbb{R}^m), rang\, \vec{r}\,'(\vec{u}) = k$ в усіх точках $\vec{u} \in U$, то класична поверхнева міра S існує і не змінюється при заміні $\vec{r}$ на еквівалентну параметризацію.

2.3 Узагальнена класична схема побудови поверхневих мір

2.3.1 Постановка задачі

Нехай X – абстрактна множина, $\mathfrak{A}$ – алгебра підмножин в X. У розділах 2 та 3 мірою на вимірному просторі $(X, \mathfrak{A})$ називатимемо довільну зліченно-адитивну функцію ν на $\mathfrak{A}$ зі значеннями в $(-\infty, +\infty]$ або $[-\infty, +\infty)$, яка задовольняє умові $\nu(\emptyset) = 0$ [2].

Нехай $m \in \mathbb{N}$; λ_m – інваріантна міра Лебега в $\mathbb{R}^m$ (див. підрозділ 1.4). Введемо позначення $\mathcal{L}_m$ для σ-алгебри вимірних за Лебегом підмножин $\mathbb{R}^m$.

Через μ тут і далі позначатимемо міру, яка задана на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m)$ і є абсолютно неперервною відносно міри λ_m. Вважатимемо також, що відповідна похідна Радона–Нікодима $f \coloneqq \frac{d\mu}{d\lambda_m}$ є неперервною функцією на $\mathbb{R}^m$. При цьому для кожної множини $A \in \mathcal{L}_m$ виконується рівність $\mu(A) = \int_A f d\lambda_m$ (див., наприклад, [2]).

Ставимо за мету запропонувати (розробити) конструкцію поверхневої міри, асоційованої з мірою μ, яка задовольняла б таким умовам:

– асоційована поверхнева міра має бути визначена принаймні для тих гладких елементарних поверхонь в $\mathbb{R}^m$, для яких існує класична поверхнева міра;

– при $f \equiv 1$ (тобто у випадку $\mu = \lambda_m$) асоційована поверхнева міра повинна збігатися з класичною;

– асоційована міра гладкої елементарної поверхні не повинна змінитися, якщо параметризацію цієї поверхні замінити на еквівалентну параметризацію.

2.3.2 Допустимі множини в афінному підпросторі скінченновимірного евклідового простору

Нехай (X, d) – довільний метричний простір. Раніше було введено позначення $B^X(a, \varepsilon)$ для відкритої кулі з центром у точці $a \in X$ радіуса $\varepsilon > 0$ у просторі X. Таким чином, $B^X(a, \varepsilon) \coloneqq \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon\}$. Введемо також позначення $B^X[a, \varepsilon]$ для замкненої кулі з центром у точці $a \in X$ радіуса $\varepsilon > 0$ у просторі X, тобто $B^X[a, \varepsilon] \coloneqq \{x \in X : d(x, a) \leq \varepsilon\}$. Якщо (X, d) – метричний простір і ε – додатне число, то через W_ε позначаємо ε-окіл множини $W \subset X$. Має місце рівність $W_\varepsilon = \bigcup_{y \in W} B^X(y, \varepsilon)$.

Зафіксуємо на $\mathbb{R}^m$ канонічний скалярний добуток $(\cdot,\cdot)$, узгоджену з ним евклідову норму $\|\cdot\|$ та метрику ρ, породжену евклідовою нормою. Для відкритої та замкненої куль (за метрикою ρ) в $\mathbb{R}^m$ із центром у точці $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$

радіуса $\varepsilon > 0$ будемо використовувати дещо спрощені позначення $B^m(\vec{a}, \varepsilon)$ та $B^m[\vec{a}, \varepsilon]$ відповідно.

Введемо до розгляду такі лінійні оператори:

– оператор $\pi_k: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ проектування на перші k координат, який кожній точці $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ ставить у відповідність $\pi_k(\vec{x}) \coloneqq (x_1, \dots, x_k)^T$;

– оператор $\tilde{\pi}_k: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ проектування на останні k координат, який кожній точці $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{m-k+1}, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ ставить у відповідність $\tilde{\pi}_k(\vec{x}) \coloneqq (x_{m-k+1}, \dots, x_m)^T$;

– оператор вкладення $i_m: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, який кожній точці $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$ співставляє $i_m(\vec{x}) \coloneqq (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^m$.

Тут і далі через $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ позначаємо стандартний ортонормований базис $\mathbb{R}^m$, а через $\{\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_k\}$ – стандартний ортонормований базис $\mathbb{R}^k$.

Нехай $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ і Q – ортогональна матриця розмірності $m \times m$. Введемо відображення $\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ таким співвідношенням:

$$\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}: \vec{x} \mapsto Q \cdot i_m(\vec{x}) + \vec{a}.$$

Розглянемо множину $L_k(\vec{a}, Q) \coloneqq \vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(\mathbb{R}^k) = \{\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(\vec{x}): \vec{x} \in \mathbb{R}^k\}$. Легко бачити, що множина $L_k(\vec{0}, Q)$ є k-вимірним лінійним підпростором $\mathbb{R}^m$, причому система векторів $\{Qi_m(\vec{h}_1), \dots, Qi_m(\vec{h}_k)\}$ є базисом $L_k(\vec{0}, Q)$.

Означення 68 [22]. Множину $X \subset L_k(\vec{a}, Q)$ будемо називати допустимою, якщо існує така вимірна за Жорданом множина $Y \subset \mathbb{R}^k$, що $X = \vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(Y)$.

Відображення $\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}: \mathbb{R}^k \to L_k(\vec{a}, Q)$ є взаємно однозначним, причому $\vec{\Phi}^{-1}_{k,\vec{a},Q}(\vec{y}) = \pi_k\big(Q^{-1} \cdot (\vec{y} - \vec{a})\big)$. Можна довести, що завдяки бієктивності $\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}: \mathbb{R}^k \to L_k(\vec{a}, Q)$ сім'я всіх допустимих підмножин в $L_k(\vec{a}, Q)$ утворює кільце множин.

Якщо Z – довільний замкнений куб в $\mathbb{R}^k$ з ребрами, паралельними координатним осям, то сукупність всіх допустимих підмножин $\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(Z)$ (цю сукупність ми будемо позначати через $\mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$) утворює алгебру підмножин в $\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(Z)$.

Лема 11. Довільна множина $A \in \mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$ є гладкою k-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$. Крім того, $\sigma_k(A)$ існує і дорівнює $\lambda_k\left(\vec{\Phi}^{-1}_{k,\vec{a},Q}(A)\right)$.

Доведення. Множина $\vec{\Phi}^{-1}_{k,\vec{a},Q}(A)$ є жордановою в $\mathbb{R}^k$. Нехай $\vec{F}_{\vec{a}}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – відображення, задане рівністю $\vec{F}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$; нехай $\vec{\psi}_Q: \mathbb{R}^m \ni \vec{x} \mapsto Q \cdot \vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Тоді $\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q} = \vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\psi}_Q \circ i_m: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. $i'_m(\vec{z}) = \binom{I_k}{\Omega}$ у кожній точці $\vec{z} \in \mathbb{R}^k$ (тут I_k – одинична матриця розмірності $k \times k$; Ω – нульова матриця розмірності $(m-k) \times k$). При всіх $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ маємо $\vec{\psi}'_Q(\vec{u}) = Q$. Водночас для всіх $\vec{t} \in \mathbb{R}^m$ виконується $\vec{F}'_{\vec{a}}(\vec{t}) = I_m$. Позначимо стовпці матриці Q через $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_m$. Тоді $\vec{\Phi}'_{k,\vec{a},Q}(\vec{z}) = I_m \cdot Q \cdot \binom{I_k}{\Omega} = (\vec{q}_1 \quad \ldots \quad \vec{q}_k)$ у кожній точці $\vec{z} \in \mathbb{R}^k$. Отримали, що $rang\, \vec{\Phi}'_{k,\vec{a},Q}(\vec{z}) = k$ в усіх точках $\vec{z} \in \mathbb{R}^k$. Крім того, із вигляду $\vec{\Phi}'_{k,\vec{a},Q}$ випливає, що $\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q} \in C^\infty(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^m)$. Ми показали, що параметризація $\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}$ множини A задовольняє всім умовам означення 64, тому A є гладкою k-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$.

Нехай $\vec{u} \in \mathbb{R}^k$; $\Gamma_{\vec{u}}$ – матриця Грама системи векторів $\left\{\dot{\Phi}_1(\vec{u}), \ldots, \dot{\Phi}_k(\vec{u})\right\}$; тут $\dot{\Phi}_i(\vec{u})$ – i-ий стовпець матриці $\vec{\Phi}'_{k,\vec{a},Q}(\vec{u})$. Матриця $\vec{\Phi}'_{k,\vec{a},Q}(\vec{u})$ співпадає з $(\vec{q}_1 \quad \ldots \quad \vec{q}_k)$. Оскільки Q – ортогональна матриця, то $\{\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_k\}$ – ортонормована система векторів в $\mathbb{R}^m$. Тому $\Gamma_{\vec{u}} \equiv I_k$ і $\sqrt{\det \Gamma_{\vec{u}}} \equiv 1$ на $\mathbb{R}^k$. Отже, $\sigma_k(A) = \int_{\vec{\Phi}^{-1}_{k,\vec{a},Q}(A)} 1\, du_1 \ldots du_k = \lambda_k\left(\vec{\Phi}^{-1}_{k,\vec{a},Q}(A)\right)$. ■

Лема 11 показує, що класична поверхнева міра σ_k коректно визначена на алгебрі множин $\mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$. Доведемо тепер, що σ_k є мірою на $\mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$

(покажемо зліченну адитивність σ_k на вказаній алгебрі). Візьмемо таку послідовність множин $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$, що вони попарно не перетинаються та $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$. Тоді існує послідовність $\{J_n\}$ жорданових підмножин в $Z \subset \mathbb{R}^k$ така, що $A_n = \vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(J_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Бієктивність відображення $\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}$ гарантує, що множини J_n також попарно не перетинаються. З іншого боку, множина $J \coloneqq \vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ є жордановою. До того ж, $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} \vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}^{-1}(A_n) = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$. Користуючись зліченною адитивністю міри λ_k на алгебрі жорданових підмножин в Z, отримуємо

$$\sigma_k(\vee_{n=1}^{\infty} A_n) = \lambda_k(J) = \lambda_k(\vee_{n=1}^{\infty} J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k(J_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_k(A_n).$$

Означення 69. Паралелепіпедом в $\mathbb{R}^m$ будемо називати довільну множину вигляду $\{\vec{a} + t_1\vec{v}_1 + \cdots + t_k\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\}$, де $\vec{a}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^m$.

Означення 70 [21]. Паралелепіпедом в $\mathbb{R}^m$, натягнутим на k векторів $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^m$, називають множину $\{t_1\vec{v}_1 + \cdots + t_k\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\}$.

Означення 71. Нехай $\Pi = \{\vec{a} + t_1\vec{v}_1 + \cdots + t_k\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\}$ – паралелепіпед в $\mathbb{R}^m$ (згідно з означенням 69). Розмірністю Π будемо називати розмірність лінійної оболонки $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$.

Лема 12. Нехай $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ – довільна лінійно незалежна система векторів в $\mathbb{R}^m$. Тоді існує така ортогональна матриця Q розмірності $m \times m$, що лінійний оператор $\vec{\psi}_Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, заданий рівністю $\vec{\psi}_Q(\vec{x}) = Q \cdot \vec{x}$, взаємно однозначно переводить $L_k(\vec{0}, I_m)$ на лінійну оболонку $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$.

Доведення. Лінійний простір $L_k(\vec{0}, I_m)$ співпадає з лінійною оболонкою $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$. Проведемо ортогоналізацію та нормування системи векторів $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$. Отримаємо систему $\{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k\}$, еквівалентну системі $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$. Лінійна оболонка $\{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k\}$ є k-вимірним лінійним підпростором $\mathbb{R}^m$, тому ортогональне доповнення до лінійної оболонки $\{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k\}$ має розмірність m-k. Нехай $\{\vec{g}_{k+1},\dots,\vec{g}_m\}$ – ортонормований базис ортогонального доповнення до лінійної оболонки $\{\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_k\}$. Тоді система векторів $\{\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_k,\vec{g}_{k+1},\dots,\vec{g}_m\}$ утворює ортонормований базис $\mathbb{R}^m$. Введемо до розгляду матрицю $Q=(\vec{g}_1 \quad \dots \quad \vec{g}_m)$ (j-ий стовпець Q містить запис вектора $\vec{g}_j$ в декартових координатах, $j=\overline{1,m}$) і відображення $\vec{\psi}_Q(\vec{x})=Q\cdot\vec{x}$. При будь-якому $i\in\{1,\dots,m\}$ маємо: $\vec{\psi}_Q(\vec{e}_i)=Q\cdot\vec{e}_i=\vec{g}_i$. Таким чином, відображення $\vec{\psi}_Q$ переводить ортонормований базис $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_m\}$ в ортонормований базис $\{\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_m\}$ і матриця Q є ортогональною. З ортогональності Q випливає, що $\det Q\in\{-1;1\}$, тому відображення $\vec{\psi}_Q$ взаємно однозначно відображує $\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^m$. Лишилося показати, що лінійна оболонка $\{\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_k\}$ (яка співпадає з лінійною оболонкою $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\}$) є образом лінійної оболонки $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_k\}$ при відображенні $\vec{\psi}_Q$. Це справді так, адже

$$Q\cdot(\alpha_1\vec{e}_1+\dots+\alpha_k\vec{e}_k)=\alpha_1 Q\vec{e}_1+\dots+\alpha_k Q\vec{e}_k=\alpha_1\vec{g}_1+\dots+\alpha_k\vec{g}_k$$

для всіх $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{R}$. ■

Твердження 22. Нехай $\Pi=\left\{\vec{a}+t_1\vec{v}_1+\dots+t_k\vec{v}_k : t_i\in[0;1], i=\overline{1,k}\right\}$ – паралелепіпед розмірності k в $\mathbb{R}^m$. Тоді існують така ортогональна матриця Q розмірності $m\times m$ і такий замкнений куб Z в $\mathbb{R}^k$ з ребрами, паралельними координатним осям, що $\Pi\in\mathfrak{N}_k(\vec{a},Q,Z)$.

Доведення. Система $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\}$ – лінійно незалежна, адже Π має розмірність k. Візьмемо в якості Q таку ортогональну матрицю, що лінійний оператор $\vec{\psi}_Q:\vec{x}\mapsto Q\cdot\vec{x}$ переводить $L_k\left(\vec{0},I_m\right)$ на лінійну оболонку $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k\}$ (існування вказаної матриці гарантується лемою 12). Нехай M – паралелепіпед в $\mathbb{R}^k$, натягнутий на вектори $\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_1),\dots,\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_k)$. І нехай Z – такий замкнений куб в $\mathbb{R}^k$ з ребрами, паралельними координатним осям, що $M\subset Z$ (відповідний куб Z існує, адже довільний паралелепіпед є обмеженою множиною). M є жордановою підмножиною Z. Можна перевірити, що $\Pi = \overrightarrow{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(M)$. Із вищесказаного робимо висновок, що $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$. ∎

Твердження 23. Нехай $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$; Q – ортогональна матриця розмірності $m \times m$; Z – замкнений куб в $\mathbb{R}^k$ з ребрами, паралельними координатним осям. Нехай $f_1, f_2 \in C\left(\overrightarrow{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(Z)\right)$. Нехай ν_1, ν_2 – функції на алгебрі $\mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$, задані рівностями $\nu_1(A) = \int_A f_1\, d\sigma_k$ та $\nu_2(A) = \int_A f_2\, d\sigma_k$ для всіх множин $A \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$. Тоді справджуються два наведені далі твердження:

а) ν_1, ν_2 – міри на $\mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$;

б) якщо міри ν_1 і ν_2 співпадають на всіх паралелепіпедах $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$ розмірності k, то рівність $\nu_1(A) = \nu_2(A)$ має місце для довільної допустимої множини $A \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$.

Доведення:

а) покажемо, що ν_1 – міра на $\mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$ (для ν_2 міркування цілком аналогічні). Функція ν_1 набуває лише скінченних значень. Дійсно, якщо $A \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$, то $A \subset \overrightarrow{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(Z)$. Оскільки Z – компакт в $\mathbb{R}^k$ і $\overrightarrow{\Phi}_{k,\vec{a},Q} \in C^\infty(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^m)$, то $\overrightarrow{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(Z)$ – компакт в $\mathbb{R}^m$. За теоремою Вейєрштрасса (Karl Theodor Weierstraß), існує $C \coloneqq max\left\{|f_1(\vec{x})| : \vec{x} \in \overrightarrow{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(Z)\right\} < \infty$. Тоді $|\nu_1(A)| = \left|\int_A f_1\, d\sigma_k\right| \le C \cdot \sigma_k(A) < \infty$. Адитивність ν_1 на $\mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$ очевидна. Доведемо неперервність ν_1. Візьмемо таку послідовність множин $\{A_n\} \subset \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$, що $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ та $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Тоді $|\nu_1(A_n)| \le C \cdot \sigma_k(A_n)$. Послідовність $\{C \cdot \sigma_k(A_n)\}$ прямує до 0, адже неперервність міри σ_k нам уже відома. Тому й $\nu_1(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;

б) нехай $\tilde{C} \coloneqq \max\left\{|f_1(\vec{x}) - f_2(\vec{x})| : \vec{x} \in \overrightarrow{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(Z)\right\}$. Якщо $\tilde{C} = 0$, то $f_1 \equiv f_2$ на $\overrightarrow{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(Z)$, тому $\nu_1 \equiv \nu_2$ на $\mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$. Припустимо, що $\tilde{C} > 0$. Беремо будь-яку множину $A \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$. Позначимо: $J = \overrightarrow{\Phi}_{k,\vec{a},Q}^{-1}(A)$. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки J – жорданова підмножина Z, то існує множина $J^\varepsilon \subset J$ така, що J^ε є диз'юнктним об'єднанням скінченної кількості паралелепіпедів розмірності k в Z з ребрами, паралельними ортам $\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_k$, і виконується нерівність $\lambda_k(J \setminus J^\varepsilon) < \varepsilon$. Тоді, за лемою 11, $\sigma_k\left(\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(J \setminus J^\varepsilon)\right) < \varepsilon$. Водночас, позначивши $A^\varepsilon := \vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(J^\varepsilon)$, отримаємо $\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(J \setminus J^\varepsilon) = \vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(J) \setminus \vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(J^\varepsilon) = A \setminus A^\varepsilon$. Множина A^ε є диз'юнктним об'єднанням скінченної кількості паралелепіпедів розмірності k в $\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(Z)$. Тому, за умовою твердження, $\nu_1(A^\varepsilon) = \nu_2(A^\varepsilon)$. Зауважимо, що із вкладення $J^\varepsilon \subset J$ випливає вкладення $A^\varepsilon \subset A$, тому $A = A^\varepsilon \vee (A \setminus A^\varepsilon)$. Оскільки $\int_{A^\varepsilon}(f_1 - f_2)\, d\sigma_k = 0$, то $\nu_1(A) - \nu_2(A) = \int_{A \setminus A^\varepsilon}(f_1 - f_2)\, d\sigma_k$. Водночас

$$\left|\int_{A \setminus A^\varepsilon}(f_1 - f_2)\, d\sigma_k\right| \le \tilde{C} \cdot \sigma_k(A \setminus A^\varepsilon) < \tilde{C} \cdot \varepsilon.$$

З урахуванням довільності вибору $\varepsilon > 0$ отримали, що величина $|\nu_1(A) - \nu_2(A)|$ строго менша за будь-яке додатне число. Отже, $\nu_1(A) = \nu_2(A)$. ■

2.3.3 Асоційована поверхнева міра допустимих множин

Означення 72. Міру σ_k^μ на алгебрі $\mathfrak{R}_k(\vec{a}, Q, Z)$ будемо називати поверхневою мірою, асоційованою з мірою μ, якщо виконані наступні дві умови:

а) існує така функція $\varphi \in C\left(\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}(Z)\right)$, що $\sigma_k^\mu(A) = \int_A \varphi\, d\sigma_k$ для всіх $A \in \mathfrak{R}_k(\vec{a}, Q, Z)$;

б) якщо $\Pi \in \mathfrak{R}_k(\vec{a}, Q, Z)$ – паралелепіпед розмірності k в $\mathbb{R}^m$, то у випадку $m > k$ виконується рівність

$$\sigma_k^\mu(\Pi) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\mu(\Pi_\varepsilon)}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)\right)}, \qquad (2)$$

а у випадку $m = k$ справедливою є рівність

$$\sigma_k^{\mu}(\Pi) = \mu(\Pi). \tag{3}$$

Перевірка коректності означення 72 включає в себе декілька аспектів.

Існування такої міри σ_k^{μ}, що задовольняє всім умовам означення 72, буде доведено далі (див. наслідок 8). Поки ми не володіємо фактом існування вказаної міри, будемо користуватися записом σ_k^{μ} на позначення функції, визначеної на множині всіх паралелепіпедів розмірності k в $\mathbb{R}^m$ і заданої рівністю (2) або (3) залежно від співвідношення між k та m.

Єдиність міри, що задовольняє всім умовам означення 72, слідує з твердження 23.

Для перевірки коректності формули (2) потрібно звернути увагу на два моменти. По-перше, варто перевірити, що для довільного паралелепіпеда Π множина Π_{ε} належить $\mathcal{L}_m$. Це справді так, адже для кожної множини $A \subset \mathbb{R}^m$ множина A_{ε} є відкритою в $\mathbb{R}^m$, водночас всі борелівські множини належать σ-алгебрі $\mathcal{L}_m$. По-друге, треба перевірити, що відповідна границя існує для довільного паралелепіпеда $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$ розмірності k в $\mathbb{R}^m$. Це буде показано далі (див. твердження 26).

Формула (3) є коректною, адже паралелепіпед Π, як випливає з означення 69, є замкненою, а отже, й лебегівською множиною в $\mathbb{R}^m$.

Можна довести, що у випадку $\mu = \lambda_m$ значення $\sigma_k^{\mu}(\Pi)$, де $\Pi = \left\{\vec{a} + t_1\vec{v}_1 + \dots + t_k\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\right\} \subset \mathbb{R}^m$, співпадає з класичним k-вимірним об'ємом Π, що задається формулою $\sqrt{\det\left(\left(\vec{v}_i, \vec{v}_j\right)\right)_{i,j=\overline{1,k}}}$ (див. зауваження 16).

Твердження 24. Нехай $m > k$. Припустимо, що $\Pi = \left\{\vec{a} + t_1\vec{v}_1 + \dots + t_k\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\right\}$ – паралелепіпед розмірності k в $\mathbb{R}^k$. Тоді:

$$\sigma_k^{\mu}\big(i_m(\Pi)\big) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\mu\Big(\Pi\times B^{m-k}\big(\vec{0},\varepsilon\big)\Big)}{\lambda_{m-k}\Big(B^{m-k}\big(\vec{0},\varepsilon\big)\Big)}. \tag{4}$$

Доведення. Позначимо: $\widetilde{\Pi} \coloneqq i_m(\Pi)$. Очевидно, що

$$\widetilde{\Pi} = \big\{i_m(\vec{a}) + t_1 i_m(\vec{v}_1) + \cdots + t_k i_m(\vec{v}_k) \colon t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\big\},$$

тому $\widetilde{\Pi}$ є паралелепіпедом розмірності k в $\mathbb{R}^m$. Нехай K – довільний компакт в $\mathbb{R}^m$ такий, що $K \supset \widetilde{\Pi}_1$ (вказаний компакт існує, адже при будь-якому $\delta > 0$ множина $\widetilde{\Pi}_\delta$ є обмеженою в $\mathbb{R}^m$). Тоді для кожного $\varepsilon \in (0;1]$ виконано вкладення $\widetilde{\Pi}_\varepsilon \subset K$. За теоремою Вейєрштрасса, $\sup\limits_K|f| = \max\limits_K|f| < \infty$. Тоді

$$-\max_K|f| \le f(x) \le \max_K|f| \tag{5}$$

при всіх $x \in K$. Зафіксуємо такі числа $p_1, \dots, p_k > 0$, що при всіх $\varepsilon \in (0;1]$ існує такий вектор $\vec{b}_\varepsilon \in \mathbb{R}^k$, що для паралелепіпеда

$$A^\varepsilon \coloneqq \big\{\vec{b}_\varepsilon + t_1(1+p_1\varepsilon)\vec{v}_1 + \cdots + t_k(1+p_k\varepsilon)\vec{v}_k \colon t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\big\} \subset \mathbb{R}^k$$

виконується вкладення

$$\widetilde{\Pi}_\varepsilon \subset A^\varepsilon \times B^{m-k}\big(\vec{0},\varepsilon\big). \tag{6}$$

Візьмемо довільне число $\varepsilon \in (0;1]$. Легко бачити, що $\Pi \times B^{m-k}\big(\vec{0},\varepsilon\big) \subset \widetilde{\Pi}_\varepsilon$. Тому із (6) отримуємо $\Pi \subset A^\varepsilon$. За адитивністю міри, $\mu\big(\widetilde{\Pi}_\varepsilon\big) = \mu\Big(\Pi \times B^{m-k}\big(\vec{0},\varepsilon\big)\Big) + \mu\Big(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \Big(\Pi \times B^{m-k}\big(\vec{0},\varepsilon\big)\Big)\Big)$.

$\mu\left(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right)\right) = \int_{\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right)} f\, d\lambda_m$, водночас $\int_{\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right)} f\, d\lambda_m \le \max_K |f| \cdot \lambda_m\left(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right)\right)$. Отже,

$$\mu\left(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right)\right) \le \max_K |f| \cdot \lambda_m\left(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right)\right).$$

Із формули (6) випливає, що

$$\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right) \subset \left(A^\varepsilon \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right) \setminus \left(\mathit{\Pi} \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right).$$

Водночас $\left(A^\varepsilon \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right) \setminus \left(\mathit{\Pi} \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right) = (A^\varepsilon \setminus \Pi) \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)$. Міра λ_s при будь-якому $s \in \mathbb{N}$ є s-кратним добутком $\lambda_1 \times \ldots \times \lambda_1$ лінійної міри Лебега λ_1 [15], тому

$$\lambda_m\left((A^\varepsilon \setminus \Pi) \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right) = \lambda_k(A^\varepsilon \setminus \Pi) \cdot \lambda_{m-k}\left(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right).$$

Отже,

$$\mu\left(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi \times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right)\right) \le \max_K |f| \cdot \lambda_k(A^\varepsilon \setminus \Pi) \cdot \lambda_{m-k}\left(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right).$$

Оскільки $\Pi \subset A^\varepsilon$, то $\lambda_k(A^\varepsilon \setminus \Pi) = \lambda_k(A^\varepsilon) - \lambda_k(\Pi)$. Користуючись інваріантністю міри λ_k відносно паралельних перенесень та однією з формул жорданової міри паралелепіпеда в $\mathbb{R}^k$, натягнутого на k векторів, отримуємо ланцюжок рівностей:

$$\lambda_k(A^\varepsilon) = |\det((1+p_1\varepsilon)\vec{v}_1 \quad \ldots \quad (1+p_k\varepsilon)\vec{v}_k)|,$$
$$|\det((1+p_1\varepsilon)\vec{v}_1 \quad \ldots \quad (1+p_k\varepsilon)\vec{v}_k)| = |\det(\vec{v}_1 \quad \ldots \quad \vec{v}_k)| \cdot \prod_{i=1}^{k}(1+p_i\varepsilon),$$

$$|\det(\vec{v}_1 \quad \dots \quad \vec{v}_k)| \cdot \prod_{i=1}^{k}(1+p_i\varepsilon) = \lambda_k(\Pi) \cdot \prod_{i=1}^{k}(1+p_i\varepsilon).$$

Остаточно: $\lambda_k(A^\varepsilon) = \lambda_k(\Pi) \cdot \prod_{i=1}^{k}(1+p_i\varepsilon)$. Якщо позначити $\frac{\lambda_k(\Pi)}{\varepsilon} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k}(1+p_i\varepsilon) - 1\right)$ через $\varphi(\varepsilon)$, то матимемо: $\lambda_k(A^\varepsilon) = \lambda_k(\Pi) + \varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon)$, причому $\varphi(\cdot)$ є многочленом від ε (тому $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varphi(\varepsilon) = \varphi(0) \in \mathbb{R}$). Тоді $\lambda_k(A^\varepsilon \setminus \Pi) = \lambda_k(A^\varepsilon) - \lambda_k(\Pi) = \varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon)$. Таким чином,

$$\mu\left(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi \times B^{m-k}\left(\vec{0},\varepsilon\right)\right)\right) \le \max_K |f| \cdot \varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon) \cdot \lambda_{m-k}\left(B^{m-k}\left(\vec{0},\varepsilon\right)\right).$$

А значить, $\frac{\mu\left(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi \times B^{m-k}\left(\vec{0},\varepsilon\right)\right)\right)}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}\left(\vec{0},\varepsilon\right)\right)} \le \max_K |f| \cdot \varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon)$.

Аналогічно з використанням формули (5) можна отримати нерівність $\frac{\mu\left(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi \times B^{m-k}\left(\vec{0},\varepsilon\right)\right)\right)}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}\left(\vec{0},\varepsilon\right)\right)} \ge -\max_K |f| \cdot \varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon)$.

Отже, для будь-якого числа $\varepsilon \in (0;1]$ має місце подвійна нерівність:

$$-\max_K |f| \cdot \varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon) \le \frac{\mu\left(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi \times B^{m-k}\left(\vec{0},\varepsilon\right)\right)\right)}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}\left(\vec{0},\varepsilon\right)\right)} \le \max_K |f| \cdot \varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon).$$

Із рівностей $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(-\max_K |f| \cdot \varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon)\right) = 0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\left(\max_K |f| \cdot \varepsilon \cdot \varphi(\varepsilon)\right)$ випливає, що границя $\frac{\mu\left(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi \times B^{m-k}\left(\vec{0},\varepsilon\right)\right)\right)}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}\left(\vec{0},\varepsilon\right)\right)}$ при $\varepsilon \to 0+$ існує і дорівнює 0. За формулою (2), $\sigma_k^\mu\left(\widetilde{\Pi}\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \frac{\mu\left(\widetilde{\Pi}_\varepsilon\right)}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}\left(\vec{0},\varepsilon\right)\right)}$. Оскільки $\mu\left(\widetilde{\Pi}_\varepsilon\right) = \mu\left(\Pi \times B^{m-k}\left(\vec{0},\varepsilon\right)\right) + \mu\left(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi \times B^{m-k}\left(\vec{0},\varepsilon\right)\right)\right)$ та

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \frac{\mu\left(\widetilde{\Pi}_\varepsilon \setminus \left(\Pi\times B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right)\right)}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right)} = 0$, то з урахуванням $i_m(\Pi) = \widetilde{\Pi}$ отримуємо остаточний результат – формулу (4). ■

Лема 13 [1, с. 150]. Нехай $E \subset \mathbb{R}^m$ – зв'язна вимірна за Жорданом множина. Нехай $\eta: E \to \mathbb{R}$ – неперервна функція. Тоді існує така точка $\vec{\xi} \in E$, що $\int_E \eta(\vec{x})d\vec{x} = \eta(\vec{\xi}) \cdot \lambda_m(E)$.

Лема 14. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ і $\eta \in C\left(B^n(\vec{0},\alpha);\mathbb{R}\right)$. Тоді

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{\lambda_n\left(B^n(\vec{0},\varepsilon)\right)} \cdot \int_{B^n(\vec{0},\varepsilon)} \eta d\lambda_n = \eta(\vec{0}).$$

Доведення. Оскільки при будь-якому $\varepsilon > 0$ куля $B^n(\vec{0},\varepsilon)$ є зв'язною вимірною за Жорданом множиною, то можемо скористатися лемою 13 і для всіх $\varepsilon \in (0;\alpha]$ отримати:

$$\int_{B^n(\vec{0},\varepsilon)} \eta d\lambda_n = \eta\left(\vec{\xi}(\varepsilon)\right) \cdot \lambda_n\left(B^n(\vec{0},\varepsilon)\right),$$

де $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\varepsilon) \in B^n(\vec{0},\varepsilon)$. Тоді $\frac{1}{\lambda_n\left(B^n(\vec{0},\varepsilon)\right)} \cdot \int_{B^n(\vec{0},\varepsilon)} \eta d\lambda_n = \eta\left(\vec{\xi}(\varepsilon)\right)$. При $\varepsilon \to 0+$ кулі $B^n(\vec{0},\varepsilon)$ стягуються в точку $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$. Отже, $\vec{\xi}(\varepsilon) \to \vec{0}$ при $\varepsilon \to 0+$ завдяки належності $\vec{\xi}(\varepsilon) \in B^n(\vec{0},\varepsilon)$ А оскільки функція η є неперервною в $\vec{0}$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \eta\left(\vec{\xi}(\varepsilon)\right) = \eta(\vec{0})$. Лему доведено. ■

Твердження 25. Нехай $\Pi = \left\{\vec{a} + t_1\vec{v}_1 + \dots + t_k\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\right\}$ – паралелепіпед розмірності k в $\mathbb{R}^k$. Тоді:

$$\sigma_k^\mu\left(i_m(\Pi)\right) = \int_\Pi (f \circ i_m)(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_k. \tag{7}$$

Доведення. При $m=k$, згідно з означенням 72 (формула (3)), $\sigma_k^{\mu}\big(i_m(\Pi)\big) = \mu\big(i_m(\Pi)\big) = \int_{i_m(\Pi)} f d\lambda_m$. Крім того, i_m є тотожним відображенням на $\mathbb{R}^m$ при $m=k$, тому формула (7) справедлива.

Нехай тепер $m > k$. Виконано всі умови твердження 24, тому має місце формула (4). Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$ і позначимо: $G^{\varepsilon} \coloneqq \Pi \times B^{m-k}\big(\vec{0}, \varepsilon\big)$.

$$\mu(G^{\varepsilon}) = \int_{G^{\varepsilon}} f d\lambda_m = \int_{\tilde{\pi}_{m-k}(G^{\varepsilon})} dx_{k+1} \dots dx_m \int_{G^{\varepsilon}(x_{k+1},\dots,x_m)} f dx_1 \dots dx_k,$$

де $G^{\varepsilon}(x_{k+1}, \dots, x_m) \coloneqq \{(x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k : (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)^T \in G^{\varepsilon}\}$. Очевидно, що $\tilde{\pi}_{m-k}(G^{\varepsilon}) = B^{m-k}\big(\vec{0}, \varepsilon\big)$. Крім того, $G^{\varepsilon}(x_{k+1}, \dots, x_m) = \Pi$ при кожному $(x_{k+1}, \dots, x_m)^T \in B^{m-k}\big(\vec{0}, \varepsilon\big)$. Отже, для всіх $\varepsilon > 0$ справедливою є формула $\mu\left(\Pi \times B^{m-k}\big(\vec{0}, \varepsilon\big)\right) = \int_{B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)} dx_{k+1} \dots dx_m \int_{\Pi} f dx_1 \dots dx_k$.

Візьмемо довільне число $\alpha > 0$ і розглянемо функцію $I : B^{m-k}\big[\vec{0}, \alpha\big] \to \mathbb{R}$, задану рівністю

$$I(y_1, \dots, y_{m-k}) = \int_{\Pi} f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{m-k}) dx_1 \dots dx_k.$$

$\Pi \times B^{m-k}\big[\vec{0}, \alpha\big]$ є компактом в $\mathbb{R}^m$, який містить G^{α}. Оскільки $f \in C(\mathbb{R}^m)$, то $f \in C\big(\Pi \times B^{m-k}\big[\vec{0}, \alpha\big]\big)$, звідки $I \in C\big(B^{m-k}\big[\vec{0}, \alpha\big]\big)$. Таким чином, до функції I можна застосувати лему 14. Отримуємо формулу

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right)} \cdot \int_{B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)} I(y_1, \dots, y_{m-k}) dy_1 \dots dy_{m-k} = I\big(\vec{0}\big).$$

Оскільки $\mu\left(\Pi \times B^{m-k}\big(\vec{0}, \varepsilon\big)\right) = \int_{B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)} I(x_{k+1}, \dots, x_m) dx_{k+1} \dots dx_m$ за будь-якого $\varepsilon \in (0; \alpha]$, а також $I\big(\vec{0}\big) = \int_{\Pi} f(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) dx_1 \dots dx_k$, то з урахуванням рівності $i_m((x_1, \dots, x_k)^T) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T$ маємо остаточний результат, а саме, формулу (7). ■

Лема 15. Нехай (X, ρ), (Y, d) – метричні простори; $\varphi: X \to Y$ – таке відображення, що:

а) $\varphi(X) = Y$ (тобто φ – сюр'єкція);

б) $d\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) = \rho(x, y)$ для всіх $x, y \in X$ (тобто φ – ізометрія метричних просторів (X, ρ) та $(\varphi(X), d)$).

Тоді для будь-якої множини $A \subset X$ та довільного числа $\varepsilon > 0$ виконується рівність $\varphi(A_\varepsilon) = \big(\varphi(A)\big)_\varepsilon$.

Доведення. Покажемо спочатку, що справедливим є вкладення $\varphi(A_\varepsilon) \subset \big(\varphi(A)\big)_\varepsilon$. Нехай $y \in \varphi(A_\varepsilon)$. Тоді існує таке $x \in A_\varepsilon$, що $y = \varphi(x)$. Оскільки $A^\varepsilon = \bigcup_{z \in A} B^X(z, \varepsilon)$, то існує точка $z \in A$така, що $x \in B^X(z, \varepsilon)$. Завдяки тому, що $\rho(x, z) < \varepsilon$ та φ є ізометрією, отримуємо нерівність $d\big(\varphi(x), \varphi(z)\big) < \varepsilon$, яка означає: $y \in B^Y(\varphi(z), \varepsilon)$. Оскільки $z \in A$, то $\varphi(z) \in \varphi(A)$, а отже, $y \in \bigcup_{u \in \varphi(A)} B^Y(u, \varepsilon) = \big(\varphi(A)\big)_\varepsilon$.

Доведемо тепер, що $\big(\varphi(A)\big)_\varepsilon \subset \varphi(A_\varepsilon)$. Нехай $y \in \big(\varphi(A)\big)_\varepsilon$. Оскільки $\big(\varphi(A)\big)_\varepsilon = \bigcup_{u \in \varphi(A)} B^Y(u, \varepsilon)$, то існує така точка $v \in A$, що $y \in B^Y(\varphi(v), \varepsilon)$. Тоді $d\big(y, \varphi(v)\big) < \varepsilon$. Оскільки φ є сюр'єкцією, то існує таке $x \in X$, що $y = \varphi(x)$. А оскільки φ – ізометрія, то з нерівності $d\big(\varphi(x), \varphi(v)\big) < \varepsilon$ отримуємо нерівність $\rho(x, v) < \varepsilon$. Тому $x \in B^X(v, \varepsilon)$. З урахуванням $v \in A$ отримуємо $x \in \bigcup_{z \in A} B^X(z, \varepsilon) = A_\varepsilon$. Значить, $y = \varphi(x) \in \varphi(A_\varepsilon)$, що завершує доведення леми. ■

Зауваження 15. Будь-яке відображення $\varphi: X \to Y$, що володіє вказаними у лемі 15 властивостями, є оборотним. Дійсно,

$$\big(\varphi(x) = \varphi(y)\big) \Rightarrow \Big(d\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) = 0\Big) \Rightarrow (\rho(x, y) = 0) \Rightarrow (x = y),$$

що означає ін'єктивність відображення φ. Отже, $\varphi: X \to Y$ є бієкцією, тому існує відображення $\varphi^{-1}: Y \to X$. Крім того, φ^{-1} також задовольняє усім умовам леми 15.

Твердження 26. Нехай $\Pi = \{\vec{a} + t_1\vec{v}_1 + \dots + t_k\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\}$ – паралелепіпед розмірності k в $\mathbb{R}^m$. Нехай ортогональна матриця Q розмірності $m \times m$ і замкнений куб Z в $\mathbb{R}^k$ з ребрами, паралельними координатним осям, такі, що $\Pi \in \mathfrak{N}_k(\vec{a}, Q, Z)$ (відповідні Q та Z існують, адже виконується твердження 22). І нехай, як і раніше, $\vec{F}_{\vec{a}}: \mathbb{R}^m \ni \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{\psi}_Q: \mathbb{R}^m \ni \vec{x} \mapsto Q\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q} \coloneqq \vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\psi}_Q \circ i_m: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. Тоді має місце рівність:

$$\sigma_k^{\mu}(\Pi) = \int_M \left(f \circ \vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}\right) d\lambda_k, \tag{8}$$

де $M = \vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}^{-1}(\Pi) = \left(\pi_k \circ \vec{\psi}_Q^{-1} \circ \vec{F}_{\vec{a}}^{-1}\right)(\Pi)$.

Доведення. Припустимо, що $m > k$. Тоді, за означенням 72 (формула (2)), $\sigma_k^{\mu}(\Pi) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \frac{\mu(\Pi_\varepsilon)}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}(\vec{0},\varepsilon)\right)}$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді $\mu(\Pi_\varepsilon) = \int_{\Pi_\varepsilon} f d\lambda_m = \int_{\Pi_\varepsilon} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m$. Зробимо заміну змінних: введемо нові змінні $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$, пов'язані зі старими змінними $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ співвідношенням $\vec{x} = \vec{F}_{\vec{a}}(\vec{y}) = \vec{y} + \vec{a}$. $\det \vec{F}'_{\vec{a}}(\vec{y}) = 1$ в усіх точках $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Можна показати, що відображення $\vec{F}_{\vec{a}}^{-1}: \vec{x} \mapsto \vec{x} - \vec{a}$ задовольняє умовам леми 15, тому $\vec{F}_{\vec{a}}^{-1}(\Pi_\varepsilon) = \left(\vec{F}_{\vec{a}}^{-1}(\Pi)\right)_\varepsilon$. Водночас множина $D \coloneqq \vec{F}_{\vec{a}}^{-1}(\Pi)$ є паралелепіпедом в $\mathbb{R}^m$, натягнутим на вектори $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. Отже, за формулою заміни змінних у кратному інтегралі,

$$\int_{\Pi_\varepsilon} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = \int_{\vec{F}_{\vec{a}}^{-1}(\Pi_\varepsilon)} \left(f \circ \vec{F}_{\vec{a}}\right)(y_1, \dots, y_m) \cdot \left|\det \vec{F}'_{\vec{a}}(\vec{y})\right| dy_1 \dots dy_m,$$

тобто $\mu(\Pi_\varepsilon) = \int_{D_\varepsilon} \left(f \circ \vec{F}_{\vec{a}}\right)(y_1, \dots, y_m) dy_1 \dots dy_m$. Введемо тепер змінні $\vec{z} = (z_1, \dots, z_m)^T$, пов’язані зі змінними $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$ співвідношенням $\vec{y} = \vec{\psi}_Q(\vec{z}) = Q \cdot \vec{z}$. Оскільки $\det Q \in \{-1; 1\}$ та $\vec{\psi}_Q'(\vec{z}) = Q$ в усіх точках $\vec{z} \in \mathbb{R}^m$, то $\left|\det \vec{\psi}_Q'(\vec{z})\right| = 1$ для всіх $\vec{z} \in \mathbb{R}^m$. Відображення $\vec{\psi}_Q^{-1}: \vec{y} \mapsto Q^{-1} \cdot \vec{y}$ задовольняє умовам леми 15, тому $\vec{\psi}_Q^{-1}(D_\varepsilon) = \left(\vec{\psi}_Q^{-1}(D)\right)_\varepsilon$. Множина

$$G \coloneqq \left(\vec{\psi}_Q^{-1} \circ \vec{F}_{\vec{a}}^{-1}\right)(\Pi) = \vec{\psi}_Q^{-1}(D)$$

є паралелепіпедом в $\mathbb{R}^m$, натягнутим на вектори $Q^{-1}\vec{v}_1, \dots, Q^{-1}\vec{v}_k$. До того ж, оскільки система $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ – лінійно незалежна, система $\{Q^{-1}\vec{v}_1, \dots, Q^{-1}\vec{v}_k\}$ теж є лінійно незалежною, тому паралелепіпед *G* має розмірність *k*. Отже,

$$\int_{D_\varepsilon} \left(f \circ \vec{F}_{\vec{a}}\right)(y_1, \dots, y_m) dy_1 \dots dy_m =$$
$$= \int_{\vec{\psi}_Q^{-1}(D_\varepsilon)} \left(f \circ \vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\psi}_Q\right)(z_1, \dots, z_m) \cdot \left|\det \vec{\psi}_Q'(\vec{z})\right| dz_1 \dots dz_m,$$

тобто

$$\mu(\Pi_\varepsilon) = \int_{G_\varepsilon} \left(f \circ \vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\psi}_Q\right)(z_1, \dots, z_m) dz_1 \dots dz_m. \quad (9)$$

Розглянемо міру *ν* на $(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}_m)$, що є абсолютно неперервною відносно λ_m із похідною Радона–Нікодима $f \circ \vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\psi}_Q$, яка, очевидно, є неперервною функцією на $\mathbb{R}^m$. Тоді, за означенням похідної Радона–Нікодима, $\nu(G_\varepsilon) = \int_{G_\varepsilon} \left(f \circ \vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\psi}_Q\right) d\lambda_m$. Співставляючи це з формулою (9), отримуємо: $\mu(\Pi_\varepsilon) = \nu(G_\varepsilon)$. Тоді $\sigma_k^\mu(\Pi) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \frac{\mu(\Pi_\varepsilon)}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)\right)} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \frac{\nu(G_\varepsilon)}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}(\vec{0}, \varepsilon)\right)} = \sigma_k^\nu(G)$. Оскільки $G \subset L_k(\vec{0}, I_m)$, то $G = i_m(\pi_k(G))$. Множина $M = \pi_k(G)$ є паралелепіпедом в $\mathbb{R}^k$, натягнутим на вектори $\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_1), \dots, \pi_k(Q^{-1}\vec{v}_k)$, причому система $\{\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_1), \dots, \pi_k(Q^{-1}\vec{v}_k)\}$ є лінійно незалежною. Отже, паралелепіпед M має розмірність k, і до нього можна застосувати твердження 25. Отримуємо, що

$$\sigma_k^\nu(G) = \sigma_k^\nu\big(i_m(M)\big) = \int_M \big(f \circ \vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\psi}_Q \circ i_m\big)(z_1, \dots, z_k)dz_1 \dots dz_k,$$

тобто $\sigma_k^\nu(G) = \int_M \big(f \circ \overrightarrow{\Phi}_{k,\vec{a},Q}\big)(z_1, \dots, z_k)dz_1 \dots dz_k$. Посилання на рівність $\sigma_k^\mu(\Pi) = \sigma_k^\mu(G)$ завершує доведення твердження в разі, якщо $m > k$.

Розглянемо тепер випадок $m = k$. Тоді, згідно з означенням 72 (формула (3)), $\sigma_k^\mu(\Pi) = \mu(\Pi) = \int_\Pi f d\lambda_m = \int_\Pi f(x_1, \dots, x_m)dx_1 \dots dx_m$. Заміна змінних $\vec{x} = \big(\vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\psi}_Q\big)(\vec{z})$ приводить до рівності

$$\sigma_k^\mu(\Pi) = \int_{\left(\vec{\psi}_Q^{-1} \circ \vec{F}_{\vec{a}}^{-1}\right)(\Pi)} \big(f \circ \vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\psi}_Q\big)(z_1, \dots, z_m)dz_1 \dots dz_m.$$

З урахуванням $M = \big(\pi_m \circ \vec{\psi}_Q^{-1} \circ \vec{F}_{\vec{a}}^{-1}\big)(\Pi) = \big(\vec{\psi}_Q^{-1} \circ \vec{F}_{\vec{a}}^{-1}\big)(\Pi)$ та $i_m((z_1, \dots, z_m)^T) = (z_1, \dots, z_m)^T$ робимо висновок, що формула (8) має місце й у випадку $m = k$. ■

Наслідок 8. В умовах твердження 26 виконується рівність:

$$\sigma_k^\mu(\Pi) = \int_\Pi f d\sigma_k. \tag{10}$$

Доведення. Оскільки параметризація $\overrightarrow{\Phi}_{k,\vec{a},Q} \coloneqq \vec{F}_{\vec{a}} \circ \vec{\psi}_Q \circ i_m : M \to \Pi$ паралелепіпеда Π є бієктивним відображенням, то має місце рівність

$$\int_\Pi f d\sigma_k = \int_M \big(f \circ \overrightarrow{\Phi}_{k,\vec{a},Q}\big) \cdot \sqrt{\det \Gamma_{\vec{t}}}\, dt_1 \dots dt_k,$$

де $\Gamma_{\vec{t}}$ – матриця Грама системи векторів $\{\dot{\Phi}_1(\vec{t}), \dots, \dot{\Phi}_k(\vec{t})\}$; $\dot{\Phi}_i(\vec{t})$ – i-ий стовпець матриці $\vec{\Phi}'_{k,\vec{a},Q}(\vec{t})$. У доведенні леми 11 показано, що $\sqrt{\det \Gamma_{\vec{t}}} \equiv 1$ на $\mathbb{R}^k$. Тому $\int_M \big(f \circ \vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}\big) \cdot \sqrt{\det \Gamma_{\vec{t}}}\, dt_1 \dots dt_k = \int_M \big(f \circ \vec{\Phi}_{k,\vec{a},Q}\big) d\lambda_k = \sigma_k^{\mu}(\Pi)$, що показує справедливість формули (10). ■

Наслідок 8 дає змогу зрозуміти, що міра ν_k^{μ}, задана на алгебрі множин $\mathfrak{R}_k(\vec{a}, Q, Z)$ рівністю $\nu_k^{\mu}(A) = \int_A f d\sigma_k$, задовольняє всім умовам означення 72. Таким чином, існування асоційованої поверхневої міри на $\mathfrak{R}_k(\vec{a}, Q, Z)$ доведено.

Зауваження 16. Перевіримо, що у випадку $f \equiv 1$ (тобто $\mu = \lambda_m$) формула (8) дає звичний вираз $\sqrt{\det\Big(\big(\vec{v}_i, \vec{v}_j\big)\Big)_{i,j=\overline{1,k}}}$ для k-вимірного об'єму паралелепіпеда $\Pi = \big\{\vec{a} + t_1\vec{v}_1 + \dots + t_k\vec{v}_k : t_i \in [0;1], i = \overline{1,k}\big\}$ розмірності k в $\mathbb{R}^m$. За формулою (8), $\sigma_k^{\lambda_m}(\Pi) = \int_M 1 d\lambda_k = \lambda_k(M)$, де $M = \big(\pi_k \circ \vec{\psi}_Q^{-1} \circ \vec{F}_{\vec{a}}^{-1}\big)(\Pi)$. M є паралелепіпедом в $\mathbb{R}^k$, натягнутим на лінійно незалежні вектори $\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_1), \dots, \pi_k(Q^{-1}\vec{v}_k)$, тому $\lambda_k(M) = \sqrt{\det\Big(\big(\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_i), \pi_k(Q^{-1}\vec{v}_j)\big)\Big)_{i,j=\overline{1,k}}}$. Оскільки паралелепіпед $\big(\vec{\psi}_Q^{-1} \circ \vec{F}_{\vec{a}}^{-1}\big)(\Pi)$ натягнутий на вектори $Q^{-1}\vec{v}_1, \dots, Q^{-1}\vec{v}_k$ і вкладений в $L_k(\vec{0}, I_m)$, то $\Big(\pi_k(Q^{-1}\vec{v}_i), \pi_k\big(Q^{-1}\vec{v}_j\big)\Big) = \big(Q^{-1}\vec{v}_i, Q^{-1}\vec{v}_j\big)$ для всіх $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Крім того, матриця Q^{-1} є ортогональною, тому $\big(Q^{-1}\vec{v}_i, Q^{-1}\vec{v}_j\big) = \big(\vec{v}_i, \vec{v}_j\big)$. Отримуємо бажану рівність

$$\sigma_k^{\lambda_m}(\Pi) = \sqrt{\det\Big(\big(\vec{v}_i, \vec{v}_j\big)\Big)_{i,j=\overline{1,k}}} = \sigma_k(\Pi).$$

2.3.4 Асоційована поверхнева міра гладкої поверхні

Під час побудови асоційованої поверхневої міри на гладких елементарних поверхнях в $\mathbb{R}^m$ будемо використовувати схему, подібну до наведеної в посібнику [16] схеми конструювання класичної площі двовимірної параметризованої поверхні в $\mathbb{R}^3$.

Для жорданової множини $J \subset \mathbb{R}^k$ через Δ будемо позначати деяке скінченне розбиття J на жорданові підмножини (тобто таку сукупність $\{J_i : i = \overline{1,p}\}$ жорданових підмножин J, що $J = \bigvee_{i=1}^{p} J_i$). Дрібністю розбиття $\Delta = \{J_i : i = \overline{1,p}\}$ називають число $d(\Delta) \coloneqq \max\limits_{i=\overline{1,p}} diam(J_i)$, де через

$$diam(J_i) \coloneqq \sup\{\|\vec{x} - \vec{y}\| : \vec{x}, \vec{y} \in J_i\}$$

позначено діаметр множини J_i.

Нехай $S = \vec{r}(D)$ – гладка k-вимірна елементарна поверхня в $\mathbb{R}^m$. Нехай $\Delta = \{D_j : j = \overline{1,p}\}$ – розбиття D на жорданові підмножини. У кожній множині D_j фіксуємо будь-яку точку $\vec{u}_j \in D_j$. Виберемо довільний індекс $j \in \{1, \dots, p\}$. Матриця $\vec{r}'(\vec{u}_j)$ має розмірність $m \times k$ і ранг k. Якщо тим же символом $\vec{r}'(\vec{u}_j)$ позначити лінійний оператор $\mathbb{R}^k \ni \vec{x} \mapsto \vec{r}'(\vec{u}_j) \cdot \vec{x} \in \mathbb{R}^m$, то $\operatorname{Im} \vec{r}'(\vec{u}_j)$ співпадає з лінійною оболонкою $\{\dot{r}_1(\vec{u}_j), \dots, \dot{r}_k(\vec{u}_j)\}$, де $\dot{r}_1(\vec{u}_j), \dots, \dot{r}_k(\vec{u}_j)$ – стовпці матриці $\vec{r}'(\vec{u}_j)$. Крім того, вектори $\dot{r}_1(\vec{u}_j), \dots, \dot{r}_k(\vec{u}_j)$ – лінійно незалежні, тому $\dim \operatorname{Im} \vec{r}'(\vec{u}_j) = k$. Розглянемо множину $W_j \coloneqq \{\vec{r}(\vec{u}_j) + \vec{r}'(\vec{u}_j) \cdot (\vec{x} - \vec{u}_j) : \vec{x} \in D_j\}$. Нехай $\vec{F}_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – відображення, задане рівністю $\vec{F}_j(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{r}(\vec{u}_j) - \vec{r}'(\vec{u}_j) \cdot \vec{u}_j$. Множина $\vec{F}_j^{-1}(W_j) = W_j - \{\vec{r}(\vec{u}_j) - \vec{r}'(\vec{u}_j) \cdot \vec{u}_j\} = \vec{r}'(\vec{u}_j)(D_j)$ вкладена в лінійну оболонку $\{\dot{r}_1(\vec{u}_j), \dots, \dot{r}_k(\vec{u}_j)\}$. Існує ортогональна матриця Q_j розмірності $m \times m$ така, що лінійна оболонка $\{\dot{r}_1(\vec{u}_j), \dots, \dot{r}_k(\vec{u}_j)\}$ співпадає з $L_k(\vec{0}, Q_j)$. Тоді

$W_j \subset L_k(\vec{r}(\vec{u}_j) - \vec{r}'(\vec{u}_j) \cdot \vec{u}_j, Q_j)$. Нехай $\vec{\psi}_j: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – лінійний оператор, заданий рівністю $\vec{\psi}_j(\vec{x}) = Q_j \cdot \vec{x}$. Тоді $\vec{\psi}_j^{-1}(\vec{y}) = Q_j^{-1} \cdot \vec{y}$ при будь-якому $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Введемо до розгляду множину $G_j \coloneqq \left(\pi_k \circ \vec{\psi}_j^{-1} \circ \vec{r}'(\vec{u}_j)\right)(D_j) \subset \mathbb{R}^k$. Відображення $\pi_k \circ \vec{\psi}_j^{-1} \circ \vec{r}'(\vec{u}_j)$ дифеоморфно переводить $\mathbb{R}^k$ на $\mathbb{R}^k$. Оскільки D_j – жорданова підмножина $\mathbb{R}^k$, то й множина G_j є жордановою в $\mathbb{R}^k$ [1, с. 165]. Нехай Z_j – такий замкнений куб в $\mathbb{R}^k$ з ребрами, паралельними координатним осям, що $G_j \subset Z_j$. Неважко пересвідчитися, що $W_j = \vec{\Phi}_j(G_j)$, де $\vec{\Phi}_j = \vec{F}_j \circ \vec{\psi}_j \circ i_m: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. Із вищенаведених міркувань робимо висновок, що $W_j \in \mathfrak{N}_k(\vec{r}(\vec{u}_j) - \vec{r}'(\vec{u}_j) \cdot \vec{u}_j, Q_j, Z_j)$. Тому значення $\sigma_k^\mu(W_j)$ визначене і дорівнює $\int_{W_j} f d\sigma_k$.

Множини W_j $(j = \overline{1,p})$ утворюють «луску», що прилягає до поверхні S. На інтуїтивному рівні зрозуміло, що поверхневу міру S, асоційовану з мірою μ, доцільно вводити так, щоб сума $\sum_{j=1}^{p} \sigma_k^\mu(W_j)$ при достатньо дрібному розбитті множини параметрів $D = \bigvee_{j=1}^{p} D_j$ апроксимувала значення поверхневої міри S.

Означення 73. Нехай $S = \vec{r}(D)$ – гладка k-вимірна елементарна поверхня в $\mathbb{R}^m$. Нехай для кожної послідовності $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ скінченних розбиттів D на жорданові підмножини, яка задовольняє умові $d(\Delta_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$, послідовність сум $\sum_{j=1}^{p(i)} \sigma_k^\mu\left(W_j^{(i)}\right)$ має границю при $i \to \infty$, яка не залежить від вибору послідовності $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ (тут $\Delta_i = \left\{D_j^{(i)}: j = \overline{1, p(i)}\right\}$,

$$W_j^{(i)} \coloneqq \left\{\vec{r}\left(\vec{u}_j^{(i)}\right) + \vec{r}'\left(\vec{u}_j^{(i)}\right) \cdot \left(\vec{x} - \vec{u}_j^{(i)}\right): \vec{x} \in D_j^{(i)}\right\}).$$

Тоді будемо казати, що існує величина $\sigma_k^\mu(S)$ – поверхнева міра S, асоційована з мірою μ. За значення $\sigma_k^\mu(S)$ приймаємо границю послідовності $\left\{\sum_{j=1}^{p(i)} \sigma_k^\mu\left(W_j^{(i)}\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ при $i \to \infty$.

Теорема 11. Нехай $D \subset \mathbb{R}^k$ – непорожня жорданова множина, $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^m$ – ін'єктивна параметризація гладкої k-вимірної елементарної поверхні $S \coloneqq \vec{r}(D)$ в $\mathbb{R}^m$. Припустимо, що існує така відкрита множина $U \subset \mathbb{R}^k$, що $\overline{D} \subset U$, $\vec{r} \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$, $rang\, \vec{r}'(\vec{u}) = k$ в усіх точках $\vec{u} \in U$. Тоді значення $\sigma_k^{\mu}(S)$ існує і виконується рівність:

$$\sigma_k^{\mu}(S) = \int_S f d\sigma_k. \tag{11}$$

Доведення. Зауважимо, що з вимірності D за Жорданом випливає обмеженість D, тому $diam(D) < +\infty$. Крім того, $S = \vec{r}(D) \subset \vec{r}(\overline{D})$, $\vec{r}(\overline{D})$ – компакт в $\mathbb{R}^m$, тому поверхня S теж є обмеженою ($diam(S) < +\infty$).

Нехай $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ – довільна послідовність скінченних розбиттів D на жорданові підмножини, яка задовольняє умові $d(\Delta_i) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Припустимо, що $\Delta_i = \left\{D_j^{(i)} : j = \overline{1, p(i)}\right\}$ при всіх $i \in \mathbb{N}$. Для кожного $i \in \mathbb{N}$ та кожного $j \in \{1, \dots, p(i)\}$ введемо множину $W_j^{(i)} \coloneqq \vec{\varphi}_j^{(i)}\left(D_j^{(i)}\right)$, де

$$\vec{\varphi}_j^{(i)}: \mathbb{R}^k \ni \vec{x} \mapsto \vec{r}\left(\vec{u}_j^{(i)}\right) + \vec{r}'\left(\vec{u}_j^{(i)}\right) \cdot \left(\vec{x} - \vec{u}_j^{(i)}\right) \in \mathbb{R}^m,$$
$$\vec{u}_j^{(i)} \in D_j^{(i)}.$$

Беремо довільні індекси $i \in \mathbb{N}$ та $j \in \{1, \dots, p(i)\}$. Тоді

$$\sigma_k^{\mu}\left(W_j^{(i)}\right) = \int_{W_j^{(i)}} f d\sigma_k = \int_{D_j^{(i)}} \left(f \circ \vec{\varphi}_j^{(i)}\right)(\vec{t}) \cdot \sqrt{\det \tilde{\Gamma}_j^{(i)}(\vec{t})}\, d\vec{t}\,,$$

де $\tilde{\Gamma}_j^{(i)}(\vec{t})$ – матриця Грама системи векторів $\left\{\left(\dot{\varphi}_j^{(i)}\right)_1(\vec{t}), \dots, \left(\dot{\varphi}_j^{(i)}\right)_k(\vec{t})\right\}$; $\left(\dot{\varphi}_j^{(i)}\right)_s(\vec{t})$ – стовпець з номером s матриці $\vec{\varphi}_j^{(i)\prime}(\vec{t})$. Для довільного $\vec{t} \in \mathbb{R}^k$

виконується рівність $\vec{\varphi}_j^{(i)\prime}(\vec{t}) = \vec{r}'\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)$. Таким чином, $\tilde{\Gamma}_j^{(i)}(\vec{t}) \equiv \left(\left(\dot{r}_\alpha\left(\vec{u}_j^{(i)}\right), \dot{r}_\beta\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\right)\right)_{\alpha,\beta=\overline{1,k}}$, де $\dot{r}_s\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)$ – стовпець з номером s матриці $\vec{r}'\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)$. Введемо функцію $g: U \to \mathbb{R}$ рівністю $g(\vec{z}) = \sqrt{\det\left(\left(\dot{r}_\alpha(\vec{z}), \dot{r}_\beta(\vec{z})\right)\right)_{\alpha,\beta=\overline{1,k}}}$. Отримуємо, що

$$\sigma_k^\mu\left(W_j^{(i)}\right) = g\left(\vec{u}_j^{(i)}\right) \cdot \int_{D_j^{(i)}} \left(f \circ \vec{\varphi}_j^{(i)}\right)(\vec{t})d\vec{t}. \qquad (12)$$

Позначимо: $C_1 \coloneqq \max\limits_{\vec{z}\in\overline{D}} \|\vec{r}'(\vec{z})\|$ (тут $\|\vec{r}'(\vec{z})\|$ – операторна норма матриці $\vec{r}'(\vec{z})$, яка є підпорядкованою евклідовій векторній нормі). Можна довести, що $diam\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{p(i)} W_j^{(i)}\right) \leq diam(S) + 2C_1 \cdot diam(D) < \infty$, тому $\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{p(i)} W_j^{(i)}$ є обмеженою множиною в $\mathbb{R}^m$. Нехай $K = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{p(i)} W_j^{(i)}}$. K є компактом у просторі $\mathbb{R}^m$. Оскільки $f \in C(\mathbb{R}^m)$, то функція f, за теоремою Кантора (Georg Cantor), є рівномірно неперервною на K.

Беремо довільне число $\varepsilon > 0$. Існує таке $\delta > 0$, що

$$(\vec{x}, \vec{y} \in K; \|\vec{x} - \vec{y}\| \leq \delta) \Rightarrow (|f(\vec{x}) - f(\vec{y})| \leq \varepsilon).$$

Оскільки $d(\Delta_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$, то існує такий номер $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $i \geq N$ виконується нерівність $d(\Delta_i) \leq \frac{\delta}{C_1}$. Нехай $i \geq N$ та $j \in \{1, \dots, p(i)\}$. Тоді для кожного $\vec{t} \in D_j^{(i)}$ справедливим є співвідношення

$$\left\|\vec{\varphi}_j^{(i)}(\vec{t}) - \vec{r}\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\right\| = \left\|\vec{r}'\left(\vec{u}_j^{(i)}\right) \cdot \left(\vec{t} - \vec{u}_j^{(i)}\right)\right\| \leq C_1 \cdot \frac{\delta}{C_1} = \delta,$$

а тому й нерівність $\left|\left(f\circ\vec{\varphi}_j^{(i)}\right)\left(\vec{t}\right)-(f\circ\vec{r})\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\right|\le\varepsilon$.

Розглянемо величину

$$\eta_i:=\left|\sum_{j=1}^{p(i)}g\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\cdot\int_{D_j^{(i)}}\left(f\circ\vec{\varphi}_j^{(i)}\right)(\vec{t})d\vec{t}-\sum_{j=1}^{p(i)}g\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\cdot(f\circ\vec{r})\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\cdot\lambda_k\left(D_j^{(i)}\right)\right|$$

при $i\ge N$. З урахуванням рівності $(f\circ\vec{r})\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\cdot\lambda_k\left(D_j^{(i)}\right)=\int_{D_j^{(i)}}(f\circ\vec{r})\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)d\vec{t}$ отримуємо:

$$\eta_i=\left|\sum_{j=1}^{p(i)}g\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\cdot\int_{D_j^{(i)}}\left(\left(f\circ\vec{\varphi}_j^{(i)}\right)\left(\vec{t}\right)-(f\circ\vec{r})\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\right)d\vec{t}\right|.$$

Позначимо: $C_2:=\max\limits_{\vec{z}\in\overline{D}}g(\vec{z})$. Тоді

$$\eta_i\le C_2\cdot\sum_{j=1}^{p(i)}\left|\int_{D_j^{(i)}}\left(\left(f\circ\vec{\varphi}_j^{(i)}\right)\left(\vec{t}\right)-(f\circ\vec{r})\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\right)d\vec{t}\right|.$$

Водночас $\left|\int_{D_j^{(i)}}\left(\left(f\circ\vec{\varphi}_j^{(i)}\right)\left(\vec{t}\right)-(f\circ\vec{r})\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\right)d\vec{t}\right|\le\varepsilon\cdot\lambda_k\left(D_j^{(i)}\right)$. Тому $\eta_i\le C_2\varepsilon\cdot\sum_{j=1}^{p(i)}\lambda_k\left(D_j^{(i)}\right)$. Але $D=\bigvee_{j=1}^{p(i)}D_j^{(i)}$, звідки $\sum_{j=1}^{p(i)}\lambda_k\left(D_j^{(i)}\right)=\lambda_k(D)$. Таким чином, з урахуванням рівності (12) отримуємо наступний результат: для кожного $\varepsilon>0$ існує таке число $N\in\mathbb{N}$, що при всіх $i\ge N$ виконується нерівність

$$\left|\sum_{j=1}^{p(i)}\sigma_k^{\mu}\left(W_j^{(i)}\right)-\sum_{j=1}^{p(i)}g\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\cdot(f\circ\vec{r})\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\cdot\lambda_k\left(D_j^{(i)}\right)\right|\le\varepsilon C_2\lambda(D),$$

причому $C_2\lambda_k(D)$ – додатне число, яке не залежить ні від ε, ні від послідовності $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$. Це означає, що

$$\lim_{i\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{p(i)}\sigma_k^{\mu}\left(W_j^{(i)}\right)-\sum_{j=1}^{p(i)}g\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\cdot(f\circ\vec{r})\left(\vec{u}_j^{(i)}\right)\cdot\lambda_k\left(D_j^{(i)}\right)\right)=0. \qquad (13)$$

Послідовність $\{\Sigma_i\}_{i=1}^{\infty} \coloneqq \left\{\sum_{j=1}^{p(i)} g\left(\vec{u}_j^{(i)}\right) \cdot (f \circ \vec{r})\left(\vec{u}_j^{(i)}\right) \cdot \lambda_k\left(D_j^{(i)}\right)\right\}_{i=1}^{\infty}$ є послідовністю інтегральних сум інтеграла $\int_D (f \circ \vec{r})(\vec{t})g(\vec{t})d\vec{t}$. Оскільки функція $\vec{t} \mapsto (f \circ \vec{r})(\vec{t})g(\vec{t})$ є неперервною на U, вона є рівномірно неперервною на $\overline{D}$, а тому й на D. У такому випадку $\Sigma_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \int_D (f \circ \vec{r})(\vec{t})g(\vec{t})d\vec{t}$. Тоді з рівності (13) випливає, що $\lim\limits_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{p(i)} \sigma_k^{\mu}\left(W_j^{(i)}\right)$ існує і також дорівнює $\int_D (f \circ \vec{r})(\vec{t})g(\vec{t})d\vec{t}$, де $g(\vec{t}) = \sqrt{\det\left(\left(\dot{r}_\alpha(\vec{t}), \dot{r}_\beta(\vec{t})\right)\right)_{\alpha,\beta=\overline{1,k}}}$.

Помітимо, що $\int_D (f \circ \vec{r})(\vec{t}) \sqrt{\det\left(\left(\dot{r}_\alpha(\vec{t}), \dot{r}_\beta(\vec{t})\right)\right)_{\alpha,\beta=\overline{1,k}}}\, d\vec{t} = \int_S f d\sigma_k$. Ми показали, що для будь-якої послідовності $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ скінченних розбиттів D на жорданові підмножини, яка задовольняє умові $d(\Delta_i) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$, послідовність $\sum_{j=1}^{p(i)} \sigma_k^{\mu}\left(W_j^{(i)}\right)$ має границю при $i \to \infty$, яка не залежить від вибору $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$. Отже, згідно з означенням 73, $\sigma_k^{\mu}(S)$ існує і дорівнює $\int_S f d\sigma_k$. Теорему доведено. ■

Зауваження 17. Нехай S – гладка k-вимірна елементарна поверхня в $\mathbb{R}^m$, яка задовольняє всім умовам теореми 11. Оскільки факт існування класичної поверхневої міри S та її значення $\sigma_k(S)$ не залежать від вибору параметризації поверхні S серед еквівалентних параметризацій, то й факт існування та значення величини $\sigma_k^{\mu}(S)$, яка, згідно з формулою (11), співпадає з $\int_S f d\sigma_k$, теж не залежать від вибору параметризації S у класі еквівалентних параметризацій.

2.4 Висновки за розділом 2

Отже, у розділі 2 розглянуто різні відомі нині означення поверхні, серед яких поверхня розмірності k, гладка k-вимірна поверхня, елементарна поверхня тощо. Досліджено співвідношення між вказаними означеннями. Вказано на зв'язок між поняттями k-вимірної поверхні в $\mathbb{R}^m$ та неперервного многовида розмірності k. Визначено співвідношення між поняттями диференційовного многовида розмірності k і гладкої k-вимірної поверхні в $\mathbb{R}^m$.

Крім того, проаналізовано відому схему побудови класичної поверхневої міри в $\mathbb{R}^m$, яка є асоційованою з інваріантною мірою Лебега. При цьому класичний підхід викладений для гладких k-вимірних елементарних поверхонь в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq k)$, а також поверхонь, які можна розбити на гладкі елементарні частини. Класична конструкція k-вимірного об'єму поверхні є природним узагальненням підходу до побудови площі двовимірної параметризованої поверхні в $\mathbb{R}^3$, який розглядається у курсі математичного аналізу.

Основним результатом розділу 2 є побудована нами коректна конструкція поверхневої міри, асоційованої з такою мірою μ у просторі $\mathbb{R}^m$ (взагалі кажучи, неінваріантною), яка є абсолютно неперервною відносно інваріантної міри Лебега λ_m з неперервною похідною Радона–Нікодима. Спочатку асоційована поверхнева міра вводиться на кільці допустимих множин k-вимірного афінного підпростору в $\mathbb{R}^m$ $(m \geq k)$. Значення цієї міри на паралелепіпедах в $\mathbb{R}^m$ постулюється явною формулою. Після цього поняття асоційованої поверхневої міри переноситься на гладкі k-вимірні елементарні поверхні в $\mathbb{R}^m$. Показано, що запропонована асоційована поверхнева міра узагальнює класичну конструкцію поверхневої міри гладкої параметризованої поверхні в $\mathbb{R}^m$, тобто при $\mu = \lambda_m$ асоційована поверхнева міра співпадає з класичною. Крім того, значення асоційованої міри гладкої елементарної поверхні не змінюється від заміни її параметризації на еквівалентну.

3 ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ РІЗНИХ ПІДХОДІВ ДО ПОБУДОВИ ПОВЕРХНЕВОЇ МІРИ. ПРИКЛАДИ

3.1 Альтернативна конструкція поверхневої міри у випадку скінченновимірного простору

Через відсутність інваріантної міри Лебега у нескінченновимірних просторах реалізувати у таких просторах класичну схему побудови поверхневої міри неможливо. Тому дослідники ось уже декілька десятиліть пропонують нові конструкції поверхневої міри у нескінченновимірних просторах. Одна з таких конструкцій наведена у статті [10]. У вказаній праці запропоновано конструкцію поверхневих мір на поверхнях скінченної корозмірності, вкладених у банахів многовид із рівномірною структурою. Наведемо адаптацію цієї схеми побудови поверхневої міри до простору $\mathbb{R}^m$ (див. також [12]). Така адаптація є можливою, адже $\mathbb{R}^m$ є частковим випадком банахового многовиду з рівномірною структурою.

Означення 74 [23]. Нехай η – зовнішня k-форма на деякому лінійному просторі V. Внутрішнім добутком вектора $y \in V$ на форму η називається зовнішня (k-1)-форма $i_y\eta$, яка кожному набору $\xi_1, \dots, \xi_{k-1} \in V$ ставить у відповідність число $\left(i_y\eta\right)(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \coloneqq \eta(y, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$.

Означення 75 [12]. Нехай S є поверхнею корозмірності k в $\mathbb{R}^m$ (згідно з означенням 65) і $g: D \times V \to U$ – відповідний дифеоморфізм. Диференціальну k-форму ω класу $C_b^1(U)$ називатимемо асоційованою формою поверхні S, якщо виконуються такі дві умови:

– для будь-якого $x \in S$: $\left\{\vec{Y} \in \mathbb{R}^m : i_{\vec{Y}}\omega(x) = 0\right\} = g'\left(g^{-1}(x)\right)\left(\mathbb{R}^{m-k} \times \left\{\vec{0}\right\}\right)$;

– існує таке число $\delta > 0$, що для довільної точки $x \in S$ виконується нерівність $\|\omega(x)\| > \delta$.

Означення 76 [12]. Набір векторних полів $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$ на U, які попарно комутують, називають строго трансверсальним до вкладеної поверхні S корозмірності k з асоційованою формою ω, якщо знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх $x \in S$ виконується нерівність $\left|\omega(\vec{X})(\vec{x})\right| > \delta$.

Нехай нам задано вкладену поверхню S корозмірності k в $\mathbb{R}^m$, асоційовану з S диференціальну форму ω та строго трансверсальний до S набір векторних полів $\vec{X}$, які попарно комутують. Нехай також на $\mathbb{R}^m$ задано якусь борелівську міру μ (необов'язково інваріантну міру Лебега). Якщо для всіх множин $A \in \mathfrak{B}(S)$ існує границя

$$\sigma_{\vec{X}}(A) \coloneqq \lim_{r\to 0+} \frac{\mu\left(\Phi^{\vec{X}}_{B^k(\vec{0},r)}(A)\right)}{\lambda_k\left(B^k(\vec{0},r)\right)}, \tag{14}$$

то функція множини $\sigma_{\vec{X}}$ є мірою на S. Цю міру називають поверхневою мірою першого типу, породженою сукупністю векторних полів $\vec{X}$ [12].

Означення 77 [12]. Поверхневою мірою другого типу на S, яка індукована мірою μ й асоційованою формою ω, називають міру

$$\mu_\omega = \frac{1}{|\omega(\vec{X})||_S} \cdot \sigma_{\vec{X}},$$

де $\vec{X}$ – строго трансверсальний до S набір векторних полів, що попарно комутують, для якого границя (14) існує при всіх $A \in \mathfrak{B}(S)$.

У роботі [12] доведено, що вказана поверхнева міра другого типу (яку далі будемо називати альтернативною поверхневою мірою) еквівалентна класичній конструкцій поверхневої міри, викладеній у підрозділі 2.2. Крім того, у статті [24] оригінальним способом – за допомогою теореми Ліувілля (Joseph Liouville) та формули Гаусса–Остроградського (Johann Carl Friedrich Gauß) – доведено узгодженість класичної та альтернативної конструкцій для гладких елементарних (m-1)-вимірних поверхонь в $\mathbb{R}^m$ (такі поверхні є поверхнями корозмірності 1 в сенсі означення 65).

3.2 Еквівалентність узагальненої класичної та альтернативної конструкцій поверхневої міри для поверхонь, що є графіками гладких функцій

Лема 16. Нехай $m \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_my_1 & x_my_2 & \dots & x_my_m \end{pmatrix}$. Тоді $\det(\lambda I_m - A) = \lambda^{m-1} \cdot (\lambda - \sum_{i=1}^{m} x_iy_i)$.

Доведення. Скористаємося фактом, відомим із лінійної алгебри [25, с. 153]: $\det(\lambda I_m - A) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, де кожен коефіцієнт a_k $(k = \overline{0, m-1})$ дорівнює взятій зі знаком $(-1)^{m-k}$ сумі усіх головних мінорів порядку m-k матриці A. Розглянемо довільний мінор M матриці A, який має порядок 2. Нехай, для визначеності, M – визначник матриці, утвореної з елементів A, що знаходяться на перетині рядків із номерами i_1, i_2 $(i_1 < i_2)$ та стовпців із номерами j_1, j_2 $(j_1 < j_2)$. Тоді $M = \det\begin{pmatrix} x_{i_1}y_{j_1} & x_{i_1}y_{j_2} \\ x_{i_2}y_{j_1} & x_{i_2}y_{j_2} \end{pmatrix} = 0$. Це означає, що усі мінори матриці A, які мають порядок не менше 2, є нульовими. Із цього одержуємо, що $a_k = 0$ при $k \in \{0, \dots, m-2\}$, тому $\det(\lambda I_m - A) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} = \lambda^{m-1} \cdot (\lambda + a_{m-1})$. Всі діагональні елементи матриці A, і тільки вони, є головними мінорами порядку 1 матриці A. Таким чином, $a_{m-1} = (-1) \cdot trA = (-1) \cdot \sum_{i=1}^{m} x_iy_i$, і доведення леми завершено. ■

Наслідок 9. Нехай $m \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 + c_1^2 & c_1c_2 & \dots & c_1c_m \\ c_2c_1 & 1 + c_2^2 & \dots & c_2c_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_mc_1 & c_mc_2 & \dots & 1 + c_m^2 \end{pmatrix}$. Тоді $\det A = 1 + c_1^2 + \dots + c_m^2$.

Доведення. Уведемо до розгляду допоміжну матрицю $B := A - I_m = \begin{pmatrix} c_1^2 & c_1c_2 & \dots & c_1c_m \\ c_2c_1 & c_2^2 & \dots & c_2c_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_mc_1 & c_mc_2 & \dots & c_m^2 \end{pmatrix}$. Матриця B задовольняє лемі 16, якщо покласти $x_i := c_i$ та $y_i := c_i$ для всіх $i = \overline{1,m}$. Тоді

$$\det(\lambda I_m - B) = \lambda^{m-1} \cdot \left(\lambda - \sum_{i=1}^{m} c_i^2\right).$$

Отже, спектр матриці B має вигляд $\{0\}$ при $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ і $\{0; \sum_{i=1}^{m} c_i^2\}$ при $\sum_{i=1}^{m} c_i^2 > 0$. З рівності $\lambda I_m - B = (\lambda + 1)I_m - A$ випливає, що λ є власним числом B тоді й тільки тоді, коли λ+1 є власним числом A. Таким чином, спектр матриці A дорівнює $\{1\}$ за умови $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ і $\{1; 1 + \sum_{i=1}^{m} c_i^2\}$ за умови $\sum_{i=1}^{m} c_i^2 > 0$. Визначник матриці є добутком її власних чисел, тому $\det A = 1 \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{m} c_i^2\right) = 1 + c_1^2 + \dots + c_m^2$, що й потрібно було отримати. ■

Твердження 27. Нехай $D \subset \mathbb{R}^{m-1}$ – непорожня жорданова множина, $\varphi \in C^1(D; \mathbb{R})$. Тоді множина

$$S := \left\{\left(u_1, u_2, \dots, u_{m-1}, \varphi(u_1, u_2, \dots, u_{m-1})\right)^T : (u_1, u_2, \dots, u_{m-1})^T \in D\right\}$$

(графік функції φ) є гладкою (m-1)-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$. Крім того, якщо існує відкрита множина $U \subset \mathbb{R}^{m-1}$ така, що $\overline{D} \subset U$ і $\varphi \in C^1(U; \mathbb{R})$, то існує класична поверхнева міра S, яку можна обчислити за формулою

$$\sigma_{m-1}(S) = \int_D \sqrt{1 + \left\|\overrightarrow{grad}\, \varphi(\vec{u})\right\|^2} d\vec{u}. \qquad (15)$$

Доведення. Відображення $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^m$, задане співвідношенням $\vec{r}: (u_1, \dots, u_{m-1})^T \mapsto \big(u_1, \dots, u_{m-1}, \varphi(u_1, \dots, u_{m-1})\big)^T$, задовольняє усім умовам означення 64, причому $\vec{r}(D) = S$, тому S справді є гладкою (m-1)-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$. Крім того, відображення $\vec{r}: D \to S$ є взаємно однозначним. Нехай $U \subset \mathbb{R}^{m-1}$ – така відкрита множина, що $\overline{D} \subset U$ і $\varphi \in C^1(U; \mathbb{R})$. Тоді відображення $\vec{r}$ визначене на всій множині U, причому матриця Якобі $\vec{r}\,'(\vec{u})$ у кожній точці $\vec{u} \in U$ має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}(\vec{u}) & \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}(\vec{u}) & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial u_{m-1}}(\vec{u}) \end{pmatrix}$. Таким чином, $\vec{r} \in C^1(U; \mathbb{R}^m)$ та $rang\, \vec{r}\,'(\vec{u}) = m - 1$ при всіх $\vec{u} \in U$. Із цього випливає, що $\sigma_{m-1}(S)$ існує і дорівнює $\int_D \sqrt{det\, \Gamma_{\vec{u}}}\, d\vec{u}$, де $\Gamma_{\vec{u}}$ – матриця Грама системи векторів $\{\dot{r}_1(\vec{u}), \dots, \dot{r}_{m-1}(\vec{u})\}$; $\dot{r}_i(\vec{u})$ – i-ий стовпець матриці $\vec{r}\,'(\vec{u})$. Легко бачити, що

$$\Gamma_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} 1 + c_1^2 & c_1 c_2 & \dots & c_1 c_{m-1} \\ c_2 c_1 & 1 + c_2^2 & \dots & c_2 c_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} c_1 & c_{m-1} c_2 & \dots & 1 + c_{m-1}^2 \end{pmatrix},$$

де $c_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(\vec{u})$, $i = \overline{1, m-1}$. За наслідком 9, $\det \Gamma_{\vec{u}} = 1 + c_1^2 + \dots + c_{m-1}^2$, тобто

$$\det \Gamma_{\vec{u}} = 1 + \sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(\vec{u}) \right)^2 = 1 + \left\| \overrightarrow{grad}\, \varphi(\vec{u}) \right\|^2,$$

звідки й випливає бажана формула (15). ■

Надалі в цьому підрозділі припускаємо, що виконані всі умови обох частин твердження 27. Нехай, крім того, $\varphi \in C^2(U; \mathbb{R})$. Згідно з узагальненням класичного підходу до побудови поверхневої міри, асоційована поверхнева міра S дорівнює $\sigma_{m-1}^{\mu}(S) = \int_S f d\sigma_{m-1}$.

Розглянемо тепер альтернативну конструкцію. Нехай $\vec{n} \in C_b^1(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ – таке векторне поле, що $\vec{n}|_S$ співпадає з полем одиничної нормалі до S. Позначимо через $\vec{\Phi}$ потік векторного поля $\vec{n}$. Якщо $r > 0$, то кулею в $\mathbb{R}$ з центром в 0 радіуса r є інтервал $(-r, r)$, міра Лебега якого становить $\lambda_1\big((-r, r)\big) = 2r$. Таким чином, поверхнева міра S першого типу, породжена векторним полем $\vec{n}$, за означенням, дорівнює $\sigma_{\vec{n}}(S) = \lim\limits_{r\to 0+} \frac{\mu(\vec{\Phi}_{(-r,r)}S)}{\lambda_1((-r,r))} = \lim\limits_{r\to 0+} \frac{\mu(\vec{\Phi}_{(-r,r)}S)}{2r}$. З урахуванням рівності $\mu\big(\vec{\Phi}_{(-r,r)}S\big) = \int_{\vec{\Phi}_{(-r,r)}S} f d\lambda_m$ отримуємо: $\sigma_{\vec{n}}(S) = \lim\limits_{r\to 0+} \frac{1}{2r} \cdot \int_{\vec{\Phi}_{(-r,r)}S} f(\vec{x}) d\vec{x}$.

Введемо нові змінні $(\tau, \vec{y}^T) = (\tau, y_1, \dots, y_{m-1})$, пов'язані зі старими змінними $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ співвідношенням $\vec{x} = \vec{g}(\tau, y_1, \dots, y_{m-1})$, де $\vec{g}(\tau, y_1, \dots, y_{m-1}) \coloneqq \vec{\Phi}\big(\tau, y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(\vec{y})\big)$ (тут запис $\vec{\Phi}\big(\tau, y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(\vec{y})\big)$ еквівалентний запису $\vec{\Phi}_\tau\big(y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(\vec{y})\big)$). При достатньо малому $r > 0$ відображення $\vec{g}$ дифеоморфно переводить $(-r, r) \times D$ на $\vec{\Phi}_{(-r,r)}S$. За формулою заміни змінних у кратному інтегралі, $\int_{\vec{\Phi}_{(-r,r)}S} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{(-r,r)\times D} f\big(x_1(\tau, \vec{y}^T), \dots, x_m(\tau, \vec{y}^T)\big) \cdot |\det \vec{g}'(\tau, \vec{y}^T)|\, d\tau dy_1 \dots dy_{m-1}$. Тоді

$$\sigma_{\vec{n}}(S) = \lim_{r\to 0+} \frac{1}{2r} \cdot \int_{-r}^{r} d\tau \int_D f\big(x_1(\tau, \vec{y}^T), \dots, x_m(\tau, \vec{y}^T)\big) \cdot |\det \vec{g}'(\tau, \vec{y}^T)|\, dy_1 \dots dy_{m-1}.$$

Позначимо:

$$I(\tau) \coloneqq \int_D f\big(x_1(\tau, \vec{y}^T), \dots, x_m(\tau, \vec{y}^T)\big) \cdot |\det \vec{g}'(\tau, \vec{y}^T)|\, dy_1 \dots dy_{m-1}.$$

Функція f є неперервною на $\mathbb{R}^m$, тому вона рівномірно неперервна на будь-якому компакті $K \subset \mathbb{R}^m$. Із цього випливає, що $I(\cdot) \in C\big((-R, R)\big)$ при довільному (достатньо малому) $R > 0$, а отже, до функції I можна застосувати лему Лема 14. Отримуємо, що $\sigma_{\vec{n}}(S) = \lim\limits_{r\to 0+} \frac{1}{2r} \cdot \int_{-r}^{r} I(\tau)\, d\tau = I(0)$. Таким чином, $\sigma_{\vec{n}}(S) = \int_D f\big(x_1(0, \vec{y}^T), \dots, x_m(0, \vec{y}^T)\big) \cdot |\det \vec{g}'(0, \vec{y}^T)|\, dy_1 \dots dy_{m-1}$. Для всіх $\vec{y} \in D$ та $i = \overline{1, m}$ виконується рівність

$$x_i(0, \vec{y}^T) = \Phi_i\big(0, y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(\vec{y})\big) = \big(y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(\vec{y})\big)_i,$$

адже $\vec{\Phi}(0, \cdot)$ є тотожним відображенням з $\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^m$. Тому

$$\sigma_{\vec{n}}(S) = \int_D f\big(y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(\vec{y})\big) \cdot |\det \vec{g}'(0, \vec{y}^T)|\ dy_1 \dots dy_{m-1}.$$

Зауважимо, що $\vec{g} = \vec{\Phi} \circ \vec{h}$, де

$$\vec{h}\colon (-r, r) \times D \ni (\tau, y_1, \dots, y_{m-1}) \mapsto \big(\tau, y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(\vec{y})\big) \in (-r, r) \times S \subset \mathbb{R}^{m+1},$$
$$\vec{\Phi}\colon (-r, r) \times \mathbb{R}^m \ni (\tau, z_1, \dots, z_m) \mapsto \vec{\Phi}(\tau, z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Можна перевірити, що $\vec{h}'(\tau, \vec{y}^T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(\vec{y}) & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}}(\vec{y}) \end{pmatrix}$ при кожному $\tau \in (-r, r)$ і $\vec{y} \in D$. Тоді $\vec{g}'(\tau, y_1, \dots, y_{m-1}) = \vec{\Phi}'\big(\tau, y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(\vec{y})\big) \cdot \vec{h}'(\tau, y_1, \dots, y_{m-1})$. Позначимо через $\vec{x}$ точку $\big(\vec{y}^T, \varphi(\vec{y})\big)^T \in S$. Після виконання множення матриць отримуємо:

$$\vec{g}'(\tau, \vec{y}^T) =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau}(\tau, \vec{x}) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_1}(\tau, \vec{x}) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_m}(\tau, \vec{x}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(\vec{y}) & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_{m-1}}(\tau, \vec{x}) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_m}(\tau, \vec{x}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}}(\vec{y}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial \tau}(\tau, \vec{x}) & \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_1}(\tau, \vec{x}) + \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_m}(\tau, \vec{x}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(\vec{y}) & \dots & \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_{m-1}}(\tau, \vec{x}) + \frac{\partial \Phi_m}{\partial z_m}(\tau, \vec{x}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}}(\vec{y}) \end{pmatrix}.$$

Нас цікавить матриця Якобі $\vec{g}'(0, \vec{y}^T)$, яку ми позначимо через G_0. За означенням потоку векторного поля, при всіх $i = \overline{1, m}$, $\tau \in (-r, r)$, $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau}(\tau, z_1, \dots z_m) = n_i\left(\vec{\Phi}(\tau, z_1, \dots, z_m)\right)$. З урахуванням того, що $\vec{\Phi}(0, \cdot)$ є тотожним відображенням, отримуємо: $\frac{\partial \Phi_i}{\partial \tau}\big(0, y_1, \dots y_{m-1}, \varphi(\vec{y})\big) = n_i\left(\vec{\Phi}\big(0, y_1, \dots y_{m-1}, \varphi(\vec{y})\big)\right) = n_i\big(y_1, \dots y_{m-1}, \varphi(\vec{y})\big)$. Крім того, якщо $i, j \in \{1, \dots, m\}$, то $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(0, z_1, \dots, z_m) = \delta_{ij}$, де δ_{ij} – символ Кронекера. Таким чином,

$$G_0 = \begin{pmatrix} n_1\big(\vec{y}^T, \varphi(\vec{y})\big) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ n_2\big(\vec{y}^T, \varphi(\vec{y})\big) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{m-1}\big(\vec{y}^T, \varphi(\vec{y})\big) & 0 & 0 & \dots & 1 \\ n_m\big(\vec{y}^T, \varphi(\vec{y})\big) & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1}(\vec{y}) & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_2}(\vec{y}) & \dots & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}}(\vec{y}) \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $|\det G_0| = \sqrt{\det G_0^T G_0}$. Стовпці матриці G_0 з номерами від 2 до m утворюють базис дотичного простору до поверхні S у точці $\big(\vec{y}^T, \varphi(\vec{y})\big)$. Тому кожен стовпець матриці G_0 з номером від 2 до m є ортогональним першому стовпцю цієї матриці. Тоді

$$G_0^T G_0 = \begin{pmatrix} \left\|\vec{n}\big(\vec{y}^T, \varphi(\vec{y})\big)\right\|^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + c_1^2 & c_1 c_2 & \dots & c_1 c_{m-1} \\ 0 & c_2 c_1 & 1 + c_2^2 & \dots & c_2 c_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{m-1} c_1 & c_{m-1} c_2 & \dots & 1 + c_{m-1}^2 \end{pmatrix},$$

звідки безпосередньо слідує, що $\det G_0^T G_0 = \left\|\vec{n}\left(\vec{y}^T, \varphi(\vec{y})\right)\right\|^2 \cdot \det A$, де $A := \begin{pmatrix} 1 + c_1^2 & c_1 c_2 & \dots & c_1 c_{m-1} \\ c_2 c_1 & 1 + c_2^2 & \dots & c_2 c_{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1} c_1 & c_{m-1} c_2 & \dots & 1 + c_{m-1}^2 \end{pmatrix}$, $c_i := \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(\vec{y})$ $\left(i = \overline{1, m-1}\right)$. За наслідком 9, $\det A = 1 + c_1^2 + \dots + c_{m-1}^2 = 1 + \left\|\overrightarrow{grad}\ \varphi(\vec{y})\right\|^2$. Крім того, $\left\|\vec{n}\left(\vec{y}^T, \varphi(\vec{y})\right)\right\| = 1$ для будь-якої точки $\vec{y} \in D$. Отже, $\det G_0^T G_0 = 1 + \left\|\overrightarrow{grad}\ \varphi(\vec{y})\right\|^2$, а тому

$$|\det G_0| = |\det \vec{g}'(0, \vec{y}^T)| = \sqrt{1 + \left\|\overrightarrow{grad}\ \varphi(\vec{y})\right\|^2}.$$

Із вищесказаного слідує, що

$$\sigma_{\vec{n}}(S) = \int\limits_D f\left(y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(\vec{y})\right) \cdot \sqrt{1 + \left\|\overrightarrow{grad}\ \varphi(\vec{y})\right\|^2}\ dy_1 \dots dy_{m-1}.$$

Водночас з урахуванням твердження 27 маємо:

$$\int\limits_D f\left(y_1, \dots, y_{m-1}, \varphi(\vec{y})\right) \cdot \sqrt{1 + \left\|\overrightarrow{grad}\ \varphi(\vec{y})\right\|^2}\, dy_1 \dots dy_{m-1} = \int\limits_S f d\sigma_{m-1}.$$

Отже, отримано рівність $\sigma_{m-1}^{\mu}(S) = \sigma_{\vec{n}}(S)$.

Нехай ω – диференціальна 1-форма на $\mathbb{R}^m$, яка ставить у відповідність кожній точці $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ зовнішню 1-форму $\omega(\vec{x}) \in \Lambda^1\left(\mathbb{R}^m_{\vec{x}}\right) = \left(\mathbb{R}^m_{\vec{x}}\right)^*$, що діє за правилом: $\omega(\vec{x})(\vec{u}) := \left(\vec{u}, \vec{n}(\vec{x})\right)\ \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^m_{\vec{x}}$. Можна довести, що диференціальна форма ω є асоційованою формою поверхні S.

Нехай $\omega(\vec{n})$ – позначення функції на $\mathbb{R}^m$, яка кожній точці $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ співставляє $\omega(\vec{x})\left(\vec{n}(\vec{x})\right)$. До речі, виконується рівність

$\omega(\vec{x})(\vec{n}(\vec{x})) = (\vec{n}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}))$. Оскільки $\vec{n}|_S$ є полем одиничної зовнішньої нормалі до S, то $\omega(\vec{n})|_S = |\omega(\vec{n})||_S \equiv 1$. Значить, поверхнева міра другого типу на S, індукована мірою μ та асоційованою формою ω, дорівнює $\mu_\omega = \frac{1}{|\omega(\vec{n})||_S} \cdot \sigma_{\vec{n}} = \sigma_{\vec{n}}$. Із цього випливає, що $\sigma_{m-1}^{\mu}(S) = \mu_\omega(S)$.

Отже, еквівалентність узагальненого класичного та альтернативного підходів до побудови поверхневої міри у випадку поверхонь, що є графіками гладких функцій, доведена.

3.3 Еквівалентність узагальненої класичної та альтернативної конструкцій поверхневої міри у загальному випадку

Нехай $m, k \in \mathbb{N}$, $m > k$. Нехай $S \subset \mathbb{R}^m$ – вкладена в $\mathbb{R}^m$ поверхня корозмірності $m - k$ (див. означення 65), $\vec{g}: D \times V \to W$ – відповідний C_b^2-дифеоморфізм, для якого $\vec{g}(D \times \{\vec{0}\}) = S$. Припустимо також, що множина D є вимірною за Жорданом. Введемо позначення $\vec{r}$ для відображення $D \ni (z_1, \dots z_k)^T \mapsto \vec{g}(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0) \in S$. Тоді $\vec{r}(D) = S$. Крім того, можна показати, що множина S разом із параметризацією $\vec{r}$ є гладкою k-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$, тобто $S = \vec{r}(D)$ задовольняє всім умовам означення 64. Зауважимо також, що відображення $\vec{r}: D \to S$ є взаємно однозначним та належить класу $C^2(D; \mathbb{R}^m)$.

Припускаємо, що відображення $\vec{r}$ можна продовжити на деяку обмежену відкриту множину $U \subset \mathbb{R}^k$ так, щоб виконувалися умови $\overline{D} \subset U$, $\vec{r} \in C^2(U; \mathbb{R}^m)$ та $(\vec{u} \in U) \Rightarrow (rang\, \vec{r}'(\vec{u}) = k)$. Тоді, за теоремою 11, існує узагальнена класична поверхнева міра σ_k^{μ} поверхні S, асоційована з мірою μ, причому $\sigma_k^{\mu}(S) = \int_S f d\sigma_k$.

Розглянемо тепер альтернативну конструкцію поверхневої міри. Нехай ω – диференціальна (m-k)-форма на $W \subset \mathbb{R}^m$, яка ставить у відповідність кожній точці $\vec{x} \in W$ зовнішню (m-k)-форму $\omega(\vec{x}) \in \Lambda^{m-k}\left(\mathbb{R}^m_{\vec{x}}\right)$, що діє за правилом:

$$\omega(\vec{x})(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m-k}) \coloneqq \left(\sqrt{\det\left(\vec{r}'(\vec{u})\right)^T \cdot \left(\vec{r}'(\vec{u})\right)}\right)^{-1} \times$$

$$\times \det(\dot{r}_1(\vec{u}) \quad \dots \quad \dot{r}_k(\vec{u}) \;\; \vec{v}_1 \quad \dots \quad \vec{v}_{m-k}),$$

де $\vec{u} = \pi_k\left(\vec{g}^{-1}(\vec{x})\right)$, $\dot{r}_i(\vec{u})$ – i-ий стовпець матриці $\vec{r}'(\vec{u})$. Можна довести, що ω є асоційованою формою поверхні S.

Нехай $\vec{X} = \left\{\vec{X}_1, \dots, \vec{X}_{m-k}\right\}$ – строго трансверсальний до S набір попарно комутуючих векторних полів класу C_b^1 на W (відповідний набір векторних полів існує: див. приклад 1 у праці [10]). Нехай $\vec{\Phi}_t^{\vec{X}_i}$ – потік векторного поля $\vec{X}_i$. Введемо також позначення $\vec{\Phi}_{\vec{t}}^{\vec{X}} \coloneqq \vec{\Phi}_{t_1}^{\vec{X}_1} \circ \vec{\Phi}_{t_2}^{\vec{X}_2} \circ \dots \circ \vec{\Phi}_{t_{m-k}}^{\vec{X}_{m-k}}$, де $\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_{m-k})^T \in \mathbb{R}^{m-k}$. За означенням, поверхнева міра першого типу $\sigma_{\vec{X}}$ поверхні S може бути знайдена за формулою $\sigma_{\vec{X}}(S) = \lim\limits_{r\to 0+} \frac{\mu\left(\vec{\Phi}^{\vec{X}}_{B^{m-k}(\vec{0},r)}(S)\right)}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}(\vec{0},r)\right)}$. Із використанням рівності $\mu\left(\vec{\Phi}^{\vec{X}}_{B^{m-k}(\vec{0},r)}(S)\right) = \int_{\vec{\Phi}^{\vec{X}}_{B^{m-k}(\vec{0},r)}(S)} f d\lambda_m$ отримуємо $\sigma_{\vec{X}}(S) = \lim\limits_{r\to 0+} \frac{1}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}(\vec{0},r)\right)} \cdot \int_{\vec{\Phi}^{\vec{X}}_{B^{m-k}(\vec{0},r)}(S)} f(\vec{x}) d\vec{x}$. Зробимо заміну змінних: введемо нові змінні $(y_1, \dots, y_k, t_1, \dots, t_{m-k}) = \left(\vec{y}^T, \vec{t}^T\right)$, пов’язані зі старими змінними $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ співвідношенням $\vec{x} = \vec{\psi}(y_1, \dots, y_k, t_1, \dots, t_{m-k})$, де $\vec{\psi}(y_1, \dots, y_k, t_1, \dots, t_{m-k}) \coloneqq \vec{\Phi}_{\vec{t}}^{\vec{X}}\left(\vec{r}(\vec{y})\right)$, тобто

$$\vec{\psi}\left(\vec{y}^T, \vec{t}^T\right) \coloneqq \left(\vec{\Phi}_{t_1}^{\vec{X}_1} \circ \vec{\Phi}_{t_2}^{\vec{X}_2} \circ \dots \circ \vec{\Phi}_{t_{m-k}}^{\vec{X}_{m-k}}\right)\left(\vec{r}(\vec{y})\right)$$

(вважаємо, що $\vec{t} \in \mathbb{R}^{m-k}$, $\vec{y} \in D$). При достатньо малому $r > 0$ відображення $\vec{\psi}$ дифеоморфно переводить множину $B^{m-k}(\vec{0},r) \times D$ на множину $\vec{\Phi}^{\vec{X}}_{B^{m-k}(\vec{0},r)}(S)$. За формулою заміни змінних у кратному інтегралі,

$$\int_{\vec{\Phi}^{\vec{X}}_{B^{m-k}(\vec{0},r)}(S)} f(\vec{x})d\vec{x} =$$

$$= \int_{B^{m-k}(\vec{0},r)\times D} f\left(\psi_1(\vec{y}^T,\vec{t}^T),\dots,\psi_m(\vec{y}^T,\vec{t}^T)\right)\cdot\left|\det\vec{\psi}'(\vec{y}^T,\vec{t}^T)\right|d\vec{t}d\vec{y}.$$

Повертаємося до формули поверхневої міри першого типу:

$$\sigma_{\vec{X}}(S) = \lim_{r\to 0+}\frac{1}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}(\vec{0},r)\right)}\cdot\int_{B^{m-k}(\vec{0},r)} d\vec{t}\int_D f\left(\vec{\psi}(\vec{y}^T,\vec{t}^T)\right)\cdot\left|\det\vec{\psi}'(\vec{y}^T,\vec{t}^T)\right|d\vec{y}.$$

Позначимо: $I(\vec{t}) \coloneqq \int_D f\left(\vec{\psi}(\vec{y}^T,\vec{t}^T)\right)\cdot\left|\det\vec{\psi}'(\vec{y}^T,\vec{t}^T)\right|d\vec{y}$. Можна довести, що $I(\cdot) \in C\left(B^{m-k}(\vec{0},R)\right)$ при довільному (достатньо малому) $R > 0$. За лемою 14, $\lim_{r\to 0+}\frac{1}{\lambda_{m-k}\left(B^{m-k}(\vec{0},r)\right)}\cdot\int_{B^{m-k}(\vec{0},r)} I(\vec{t})d\vec{t} = I(\vec{0})$. Таким чином, $\sigma_{\vec{X}}(S) = I(\vec{0}) = \int_D f\left(\vec{\psi}(\vec{y}^T,\vec{0}^T)\right)\cdot\left|\det\vec{\psi}'(\vec{y}^T,\vec{0}^T)\right|d\vec{y}$.

Для кожного $\vec{y} \in D$ виконується $\vec{\psi}(\vec{y}^T,\vec{0}^T) = \left(\vec{\Phi}_0^{\vec{X}_1}\circ\vec{\Phi}_0^{\vec{X}_2}\circ\dots\circ\vec{\Phi}_0^{\vec{X}_{m-k}}\right)(\vec{r}(\vec{y})) = \vec{r}(\vec{y})$, адже $\vec{\Phi}_0^{\vec{X}_i} = id_{\mathbb{R}_m}$ $\forall i = \overline{1,m-k}$. Тому $\sigma_{\vec{X}}(S) = \int_D f(\vec{r}(\vec{y}))\cdot\left|\det\vec{\psi}'(\vec{y}^T,\vec{0}^T)\right|d\vec{y}$. Нехай $i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,m-k\}$. Тоді

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t_j}\left(\overrightarrow{y^0}^T,\vec{0}^T\right) = \frac{d}{dt_j}\left(\vec{\Phi}_0^{\vec{X}_1}\circ\dots\circ\vec{\Phi}_{t_j}^{\vec{X}_j}\circ\dots\circ\vec{\Phi}_0^{\vec{X}_{m-k}}\right)_i\left(\vec{r}\left(\overrightarrow{y^0}\right)\right),$$

тобто $\frac{\partial\psi_i}{\partial t_j}\left(\overrightarrow{y^0}^T,\vec{0}^T\right) = \frac{d}{dt_j}\left(\vec{\Phi}_{t_j}^{\vec{X}_j}\right)_i\left(\vec{r}\left(\overrightarrow{y^0}\right)\right) = (\vec{X}_j)_i\left(\vec{r}\left(\overrightarrow{y^0}\right)\right)$. Нехай тепер $i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,k\}$. Тоді

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial y_j}\left(\overrightarrow{y^0}^T,\vec{0}^T\right)=\frac{d}{dy_j}\left(\overrightarrow{\Phi}_0^{\vec{X}_1}\circ\ldots\circ\overrightarrow{\Phi}_0^{\vec{X}_{m-k}}\right)_i\left(\vec{r}\left(y_1^0,\ldots,y_j,\ldots,y_k^0\right)\right)=\frac{\partial r_i}{\partial y_j}\left(\overrightarrow{y^0}\right).$$

Таким чином, вищенаведені міркування показують, що

$$\vec{\psi}'\left(\vec{y}^T,\vec{0}^T\right)=\left(\dot{r}_1(\vec{y})\quad\ldots\quad\dot{r}_k(y)\ \vec{X}_1\left(\vec{r}(\vec{y})\right)\quad\ldots\quad\vec{X}_{m-k}\left(\vec{r}(\vec{y})\right)\right).\tag{16}$$

Оскільки при будь-якому $\vec{y}\in D$ матриця $\vec{r}'(\vec{y})$ має максимально можливий ранг k, то її стовпці утворюють лінійно незалежну систему векторів, а отже, визначник матриці Грама $\left(\vec{r}'(\vec{y})\right)^T\cdot\left(\vec{r}'(\vec{y})\right)$ строго додатний. Перепишемо отриману раніше формулу $\sigma_{\vec{X}}(S)=\int_D f\left(\vec{r}(\vec{y})\right)\cdot\left|\det\vec{\psi}'\left(\vec{y}^T,\vec{0}^T\right)\right|d\vec{y}$ з використанням очевидної рівності $1=\frac{\sqrt{\det\left(\vec{r}'(\vec{y})\right)^T\cdot\left(\vec{r}'(\vec{y})\right)}}{\sqrt{\det\left(\vec{r}'(\vec{y})\right)^T\cdot\left(\vec{r}'(\vec{y})\right)}}$ й одержимо

$$\sigma_{\vec{X}}(S)=\int_D(f\circ\vec{r})(\vec{y})\cdot\frac{\left|\det\vec{\psi}'\left(\vec{y}^T,\vec{0}^T\right)\right|}{\sqrt{\det\left(\vec{r}'(\vec{y})\right)^T\cdot\left(\vec{r}'(\vec{y})\right)}}\cdot\sqrt{\det\left(\vec{r}'(\vec{y})\right)^T\cdot\left(\vec{r}'(\vec{y})\right)}\,d\vec{y}.$$

Оскільки параметризація $\vec{r}\colon D\to S$ поверхні S є взаємно однозначним відображенням, можемо перейти до поверхневого інтеграла й отримати рівність

$$\sigma_{\vec{X}}(S)=\int_S f(\vec{x})\cdot\frac{\left|\det\vec{\psi}'\left(\left(\vec{r}^{-1}(\vec{x})\right)^T,\vec{0}^T\right)\right|}{\sqrt{\det\left(\vec{r}'\left(\vec{r}^{-1}(\vec{x})\right)\right)^T\cdot\left(\vec{r}'\left(\vec{r}^{-1}(\vec{x})\right)\right)}}\sigma_k(d\vec{x}).$$

Розглянемо поверхневу міру другого типу поверхні S. Ця міра задається формулою $\mu_\omega(S):=\int_S\frac{1}{|\omega(\vec{X})||_S}d\sigma_{\vec{X}}$. Тут $\omega\left(\vec{X}\right)$ – позначення функції на $W\subset\mathbb{R}^m$, яка кожній точці $\vec{x}\in W$ зіставляє

$$\omega(\vec{x})\left(\vec{X}_1(\vec{x}),\dots,\vec{X}_{m-k}(\vec{x})\right) = \left(\sqrt{\det\left(\vec{r}'(\vec{u})\right)^T \cdot \left(\vec{r}'(\vec{u})\right)}\right)^{-1} \times$$

$$\times \det\left(\dot{r}_1(\vec{u}) \quad \dots \quad \dot{r}_k(\vec{u}) \;\; \vec{X}_1(\vec{x}) \quad \dots \quad \vec{X}_{m-k}(\vec{x})\right),$$

де $\vec{u} = \pi_k\left(\vec{g}^{-1}(\vec{x})\right)$. Якщо $\vec{x} \in S$, то $\vec{u} = \vec{r}^{-1}(\vec{x})$. Отже, при $\vec{x} \in S$ маємо рівність

$$\left|\omega(\vec{x})\left(\vec{X}_1(\vec{x}),\dots,\vec{X}_{m-k}(\vec{x})\right)\right| = \frac{\left|\det\left(\dot{r}_1\left(\vec{r}^{-1}(\vec{x})\right) \quad \dots \quad \dot{r}_k\left(\vec{r}^{-1}(\vec{x})\right) \;\; \vec{X}_1(\vec{x}) \quad \dots \quad \vec{X}_{m-k}(\vec{x})\right)\right|}{\sqrt{\det\left(\vec{r}'\left(\vec{r}^{-1}(\vec{x})\right)\right)^T \cdot \left(\vec{r}'\left(\vec{r}^{-1}(\vec{x})\right)\right)}}.$$

З урахуванням формули (16) отримуємо, що

$$\left|\omega(\vec{x})\left(\vec{X}_1(\vec{x}),\dots,\vec{X}_{m-k}(\vec{x})\right)\right| = \frac{\left|\det \vec{\psi}'\left(\left(\vec{r}^{-1}(\vec{x})\right)^T, \vec{0}^T\right)\right|}{\sqrt{\det\left(\vec{r}'\left(\vec{r}^{-1}(\vec{x})\right)\right)^T \cdot \left(\vec{r}'\left(\vec{r}^{-1}(\vec{x})\right)\right)}}$$

за умови $\vec{x} \in S$. Отже, доведено бажану рівність:

$$\mu_\omega(S) = \int_S \frac{1}{|\omega(\vec{X})||_S} d\sigma_{\vec{X}} = \int_S f(\vec{x})\sigma_k(d\vec{x}) = \sigma_k^\mu(S).$$

Таким чином, еквівалентність узагальненого класичного та альтернативного підходів до побудови поверхневої міри у загальному випадку (тобто для поверхонь довільної корозмірності, вкладених в $\mathbb{R}^m$) доведена.

3.4 Поверхнева міра гіперсфери у скінченновимірному просторі згідно з узагальненням класичного підходу

3.4.1 Параметризація гіперсфери узагальненими сферичними координатами

Означення 78. Нехай $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$, $R > 0$. Гіперсферою у просторі $\mathbb{R}^m$ із центром у точці $\vec{a}$ радіуса R називатимемо множину $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m : \|\vec{x} - \vec{a}\| = R\}$, де $\|\cdot\|$ – евклідова норма на $\mathbb{R}^m$.

Наприклад, гіперсфера в $\mathbb{R}$ – це множина із двох точок, гіперсфера в $\mathbb{R}^2$ – це коло, а гіперсфера в $\mathbb{R}^3$ – це сфера. Надалі вважаємо, що $m \geq 2$.

Нехай S – гіперсфера в $\mathbb{R}^m$ із центром у точці $\vec{0}$ радіуса $R > 0$. Розглянемо множину $D \coloneqq \{(\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})^T \in \mathbb{R}^{m-1} : \alpha_1 \in [0; 2\pi); \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1} \in [0; \pi]\}$. Зрозуміло, що D є непорожньою зв'язною вимірною за Жорданом підмножиною $\mathbb{R}^{m-1}$. Введемо відображення $\vec{r}: \mathbb{R}^{m-1} \to \mathbb{R}^m$, яке кожній точці $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})^T \in \mathbb{R}^{m-1}$ ставить у відповідність точку

$$\vec{r}(\vec{\alpha}) \coloneqq \begin{pmatrix} R \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \dots \sin\alpha_{m-1} \\ R \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \dots \sin\alpha_{m-1} \\ R \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 \dots \sin\alpha_{m-1} \\ \vdots \\ R \cos\alpha_{m-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Лема 17. Нехай $i \in \{1, \dots, m\}$ – довільний індекс. Тоді $\forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^{m-1}$:

$$\frac{\partial r_i}{\partial \alpha_j}(\vec{\alpha}) = \begin{cases} 0, & j \in \{1, \dots, i-2\} \\ -R \sin\alpha_{i-1} \sin\alpha_i \sin\alpha_{i+1} \dots \sin\alpha_{m-1}, & j = i-1 \\ R \cos\alpha_{i-1} \sin\alpha_i \dots \sin\alpha_{j-1} \cos\alpha_j \sin\alpha_{j+1} \dots \sin\alpha_{m-1}, & j \in \{i, \dots, m-1\} \end{cases}.$$

Доведення. Зафіксуємо довільну точку $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^{m-1}$. Помітимо, що $r_i(\vec{\alpha}) = R\cos\alpha_{i-1}\sin\alpha_i\sin\alpha_{i+1}\dots\sin\alpha_{m-1}$, звідки безпосередньо слідує твердження леми. ■

Лема 17 дозволяє зрозуміти, що $\vec{r} \in C^1(\mathbb{R}^{m-1};\mathbb{R}^m)$.

Лема 18. $\vec{r}(D) = S$.

Доведення. Нехай $\vec{\alpha} \in D$. Тоді

$$r_1^2(\vec{\alpha}) + r_2^2(\vec{\alpha}) = R^2\sin^2\alpha_2\dots\sin^2\alpha_{m-1},$$
$$r_1^2(\vec{\alpha}) + r_2^2(\vec{\alpha}) + r_3^2(\vec{\alpha}) = R^2\sin^2\alpha_3\dots\sin^2\alpha_{m-1}, \dots,$$
$$r_1^2(\vec{\alpha}) + r_2^2(\vec{\alpha}) + \dots + r_{m-1}^2(\vec{\alpha}) = R^2\sin^2\alpha_{m-1},$$
$$r_1^2(\vec{\alpha}) + r_2^2(\vec{\alpha}) + \dots + r_m^2(\vec{\alpha}) = R^2.$$

Отримали, що $\|\vec{r}(\vec{\alpha})\|^2 = R^2$, тобто $\vec{r}(\vec{\alpha}) \in S$. Вкладення $\vec{r}(D) \subset S$ доведено. Навпаки, припустимо, що $\vec{y} \in S$. Відомо, що кожна точка $\mathbb{R}^m$ має принаймні один набір своїх узагальнених сферичних координат $(\rho, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})$. Тобто існують $\rho \geq 0$ та $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})^T \in D$ такі, що $\vec{y} = \begin{pmatrix} \rho\sin\alpha_1\sin\alpha_2\dots\sin\alpha_{m-1} \\ \rho\cos\alpha_1\sin\alpha_2\dots\sin\alpha_{m-1} \\ \rho\cos\alpha_2\sin\alpha_3\dots\sin\alpha_{m-1} \\ \dots \\ \rho\cos\alpha_{m-1} \end{pmatrix}$. Припустимо, $\rho \neq R$. Міркуваннями, аналогічними до наведених вище, отримуємо рівність $\|\vec{y}\|^2 = \rho^2$ і суперечність із тим, що $\vec{y} \in S$. Отже, $\rho = R$. Тому $\vec{r}(D) \supset S$. Рівність $\vec{r}(D) = S$ доведена. ■

Хоча умови $\vec{r}(D) = S$ та $\vec{r} \in C^1(D;\mathbb{R}^m)$ виконані, але S відносно параметризації $\vec{r}$ не є гладкою (m-1)-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$: існують такі точки $\vec{\alpha} \in D$, що $rang\,\vec{r}'(\vec{\alpha}) < m-1$. Справді, розглянемо точку $\vec{\alpha} = \vec{0} \in D$. Тоді принаймні стовпець матриці Якобі $\vec{r}'(\vec{\alpha})$ із номером 1 нульовий, а значить, ранг матриці $\vec{r}'(\vec{\alpha})$ не є максимально можливим.

Позначимо: $D^0 \coloneqq \big((0;\pi) \cup (\pi;2\pi)\big) \times (0;\pi) \times \dots \times (0;\pi) \subset \mathbb{R}^{m-1}$. D^0 є непорожньою відкритою жордановою підмножиною в $\mathbb{R}^{m-1}$, причому $D^0 \subset D$.

Позначимо $\vec{r}(D^0)$ через S^0. Ясно, що $\vec{r} \in C^1(D^0; \mathbb{R}^m)$. Візьмемо довільну точку $\vec{\alpha} \in D^0$. Квадратна підматриця розмірності $(m-1) \times (m-1)$ матриці $\vec{r}'(\vec{\alpha})$, яка знаходиться на перетині рядків з номерами $2, \dots, m$ і стовпців з номерами $1, \dots, m-1$, є верхньою трикутною, як слідує з леми 17. Визначник цієї підматриці дорівнює добутку діагональних елементів підматриці, а саме:

$$\prod_{i=2}^{m}(-R \sin \alpha_{i-1} \sin \alpha_i \sin \alpha_{i+1} \dots \sin \alpha_{m-1}) =$$
$$= (-R)^{m-1} \cdot \prod_{i=2}^{m} \sin \alpha_{i-1} \sin \alpha_i \sin \alpha_{i+1} \dots \sin \alpha_{m-1}.$$

Вказаний визначник є, очевидно, ненульовим при $\vec{\alpha} \in D^0$. Тому $rang\, \vec{r}'(\vec{\alpha}) = m - 1\ \forall \vec{\alpha} \in D^0$. Отже, S^0 є гладкою (m-1)-вимірною елементарною поверхнею в $\mathbb{R}^m$. Крім того, можна перевірити, що відображення $\vec{r}|_{D^0}\colon D^0 \to S^0$ є бієктивним.

Поверхнева міра S^0, асоційована з мірою μ, існує та дорівнює $\sigma_{m-1}^{\mu}(S^0) = \int_{S^0} f d\sigma_{m-1}$ (згідно з узагальненням класичної конструкції поверхневої міри). Перейдемо до інтеграла по множині параметрів D^0:

$$\sigma_{m-1}^{\mu}(S^0) = \int\limits_{D^0} (f \circ \vec{r})(\vec{\alpha}) \cdot \sqrt{\det\left(\vec{r}'(\vec{\alpha})\right)^T \cdot \left(\vec{r}'(\vec{\alpha})\right)}\, d\vec{\alpha}\,.$$

Можна довести, що для будь-якої точки $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^{m-1}$ виконується рівність

$$\sqrt{\det\left(\vec{r}'(\vec{\alpha})\right)^T \cdot \left(\vec{r}'(\vec{\alpha})\right)} = R^{m-1} \sin \alpha_2 \sin^2 \alpha_3 \dots \sin^{m-2} \alpha_{m-1}\,.$$

Таким чином,

$$\sigma_{m-1}^{\mu}(S^0) = R^{m-1} \int\limits_{D^0} (f \circ \vec{r})(\vec{\alpha}) \cdot \sin \alpha_2 \sin^2 \alpha_3 \dots \sin^{m-2} \alpha_{m-1}\, d\vec{\alpha}\,.$$

Записати останню формулу більш детально неможливо, не маючи додаткової інформації щодо функції f. Припустимо, що $f \equiv C$, де $C \in \mathbb{R}$, тобто $\mu = C \cdot \lambda_m$. Тоді також $f \circ \vec{r} \equiv C$ і має місце формула $\sigma_{m-1}^{\mu}(S^0) = CR^{m-1} \int_{D^0} \sin\alpha_2 \sin^2\alpha_3 \ldots \sin^{m-2}\alpha_{m-1}\, d\vec{\alpha}$. Оскільки множина параметрів D^0 має вигляд $\big((0;\pi) \cup (\pi;2\pi)\big) \times (0;\pi) \times \ldots \times (0;\pi)$, а підінтегральна функція є добутком функцій, кожна з яких залежить лише від одного параметра α_i $\big(i = \overline{1, m-1}\big)$, то інтеграл $\int_{D^0} \sin\alpha_2 \sin^2\alpha_3 \ldots \sin^{m-2}\alpha_{m-1}\, d\vec{\alpha}$ розпадається на добуток інтегралів, а саме:

$$\int_{D^0} \sin\alpha_2 \sin^2\alpha_3 \ldots \sin^{m-2}\alpha_{m-1}\, d\vec{\alpha} =$$
$$= \left(\int_0^{2\pi} 1 d\alpha_1\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\alpha_2\, d\alpha_2\right)\left(\int_0^{\pi} \sin^2\alpha_3\, d\alpha_3\right) \ldots \left(\int_0^{\pi} \sin^{m-2}\alpha_{m-1}\, d\alpha_{m-1}\right).$$

Лема 19. Для будь-якого натурального числа n виконується рівність $\int_0^{\pi} \sin^n x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$, де Γ – гамма-функція.

Доведення:

– нехай $n = 2k - 1$, де $k \in \mathbb{N}$. В інтегралі $\int_0^{\pi} \sin^{2k-1} x\, dx$ зробимо заміну змінних $u = \cos x$ й отримаємо $\int_0^{\pi} \sin^{2k-1} x\, dx = -\int_1^{-1} (1-u^2)^{k-1} du = \int_{-1}^{1} (1-u^2)^{k-1} du$. Оскільки $1 - u^2$ – парна функція від u, а відрізок $[-1;1]$ симетричний відносно 0, то $\int_{-1}^{1} (1-u^2)^{k-1} du = 2\int_0^1 (1-u^2)^{k-1} du$. Робимо заміну змінних $t = u^2$: $2\int_0^1 (1-u^2)^{k-1} du = 2\int_0^1 (1-t)^{k-1} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^1 (1-t)^{k-1} t^{-1/2} dt$. За означенням бета-функції, $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$, де $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Отже, $\int_0^1 (1-t)^{k-1} t^{-1/2} dt = \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, k\right)$. Бета-функція має таку властивість: $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ $\forall \alpha,\beta > 0$. Таким чином, $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, k\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(k)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}$. З урахуванням

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ отримуємо: $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, k\right) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k)}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}$. Рівність $k = \frac{n+1}{2}$ дозволяє отримати бажану формулу $\int_0^\pi \sin^n x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$;

– нехай $n = 2k$, де $k \in \mathbb{N}$. В інтегралі $\int_0^\pi \sin^{2k} x\, dx$ зробимо заміну змінних $y = x - \frac{\pi}{2}$ й отримаємо $\int_0^\pi \sin^{2k} x\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k} y\, dy$. Оскільки $\cos^{2k} y$ – парна функція від y, а відрізок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ симетричний відносно 0, то $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2k} y\, dy = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2k} y\, dy$. Робимо заміну змінних $u = \cos y$: $2\int_0^{\pi/2} \cos^{2k} y\, dy = 2\int_1^0 u^{2k} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} du = 2\int_0^1 \frac{u^{2k}}{\sqrt{1-u^2}} du$. Тепер зробимо заміну $v = u^2$ й отримаємо рівність $2\int_0^1 \frac{u^{2k}}{\sqrt{1-u^2}} du = \int_0^1 v^{k-1/2} \cdot (1-v)^{-1/2} dv = \mathrm{B}\left(k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Водночас $\mathrm{B}\left(k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)}$. Рівність $k = \frac{n}{2}$ дозволяє отримати бажану формулу $\int_0^\pi \sin^n x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. ■

За лемою 19,

$$\sigma_{m-1}^{\mu}(S^0) = 2\pi C R^{m-1} \prod_{i=1}^{m-2} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)} = 2\pi^{m/2} C R^{m-1} \prod_{i=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)}.$$

Для зручності запишемо $\prod_{i=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)}$ у вигляді $\prod_{i=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)}$.

Лема 20. Для довільного натурального числа $m \geq 2$ виконується рівність $\prod_{i=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$.

Доведення. При $m = 2$ добуток $\prod_{i=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)}$ є «порожнім» і за домовленістю дорівнює 1. З іншого боку, $\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) = \Gamma(1) = 1$, тому твердження леми при $m = 2$ справедливе.

Нехай тепер $m > 2$. Запишемо добуток $\prod_{i=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)}$ у «розгорнутому» вигляді: $\prod_{i=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} \cdot \ldots \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$. Із цього запису видно, що $\prod_{i=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$. Посилання на рівність Г(1) = 1 завершує доведення леми. ■

Із леми 20 випливає, що ми отримали такий результат: якщо S – гіперсфера в $\mathbb{R}^m$ із центром у точці $\vec{0}$ радіуса $R > 0, m \geq 2, \vec{r}: D \to S$ – параметризація сфери S узагальненими сферичними координатами, $\mu = C \cdot \lambda_m$, $C \in \mathbb{R}$, $S^0 \coloneqq \vec{r}(D^0)$, де $D^0 \coloneqq \big((0;\pi) \cup (\pi; 2\pi)\big) \times (0;\pi) \times \ldots \times (0;\pi) \subset D$, $\lambda_{m-1}(D \setminus D^0) = 0$, то узагальнена класична поверхнева міра S^0, асоційована з мірою μ, становить

$$\sigma_{m-1}^{\mu}(S^0) = \frac{2\pi^{m/2} C R^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

При $C = 1$ (тобто у випадку $\mu = \lambda_m$) отримуємо відому формулу

$$\sigma_{m-1}(S^0) = \frac{2\pi^{m/2} R^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$$

класичного (m-1)-вимірного об'єму гіперсфери радіуса R в $\mathbb{R}^m$ (див., наприклад, [26]).

3.4.2 Представлення гіперсфери у вигляді диз'юнктного об'єднання півсфер

Нехай, як і раніше, S – гіперсфера в $\mathbb{R}^m$ із центром у точці $\vec{0}$ радіуса $R > 0$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Інакше кажучи, $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \colon \|\vec{x}\| = R\}$, де $\|\cdot\|$ – евклідова норма в $\mathbb{R}^m$. Зауважимо, що множина

$$\Gamma \coloneqq \{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \colon x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m-1}^2 = R^2, x_m = 0\} \subset S$$

є такою, що $\sigma_{m-1}(\Gamma) = 0$, тому вона не може впливати на асоційовану поверхневу міру S. У зв'язку з цією обставиною надалі під S розумітимемо множину $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \colon \|\vec{x}\| = R\} \setminus \Gamma$. Розіб'ємо S на дві півсфери: $S = S_+ \vee S_-$, де

$$S_+ = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \colon x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m-1}^2 < R^2, x_m = \sqrt{R^2 - \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2}\right\},$$
$$S_- = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \colon x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m-1}^2 < R^2, x_m = -\sqrt{R^2 - \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2}\right\}.$$

Півсфера S_+ в $\mathbb{R}^m$ є графіком функції $\varphi \colon G \to \mathbb{R}$, $\varphi \colon G \ni (x_1, x_2, \dots, x_{m-1})^T \mapsto \sqrt{R^2 - \sum_{i=1}^{m-1} x_i^2} \in \mathbb{R}$, де

$$G = \{(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})^T \in \mathbb{R}^{m-1} \colon x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m-1}^2 < R^2\}.$$

За твердженням 27, оскільки G – жорданова підмножина $\mathbb{R}^{m-1}$ та $\varphi \in C^1(G)$, то

$$\sigma_{m-1}^{\mu}(S_+) = \int_{S_+} f d\sigma_{m-1} = \int_G (f \circ \vec{r}_+)(\vec{u}) \cdot \sqrt{1 + \left\|\overrightarrow{grad}\, \varphi(\vec{u})\right\|^2} d\vec{u},$$

де $\vec{r}_+: G \ni (u_1, \dots, u_{m-1})^T \mapsto \left(u_1, \dots, u_{m-1}, \varphi(u_1, \dots, u_{m-1})\right)^T \in S_+$ – взаємно однозначна параметризація півсфери S_+.

Нескладно перевірити, що $\forall \vec{u} \in G$, $\forall j \in \{1, \dots, m-1\}$: $\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(\vec{u}) = -\frac{u_j}{\sqrt{R^2 - \sum_{i=1}^{m-1} u_i^2}}$, а отже, $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(\vec{u})\right)^2 = \frac{u_j^2}{R^2 - \sum_{i=1}^{m-1} u_i^2}$. Тоді

$$\sqrt{1 + \left\|\overrightarrow{grad}\, \varphi(\vec{u})\right\|^2} = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(\vec{u})\right)^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \sum_{i=1}^{m-1} u_i^2}}.$$

Отже, $\sigma_{m-1}^{\mu}(S_+) = \int_G (f \circ \vec{r}_+)(\vec{u}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - \|\vec{u}\|^2}} d\vec{u}$.

Півсфера S_- в $\mathbb{R}^m$ є графіком функції $-\varphi: G \to \mathbb{R}$ (G та φ такі ж, як для S_+). За твердженням 27, оскільки G – жорданова підмножина $\mathbb{R}^{m-1}$ та $-\varphi \in C^1(G)$, то

$$\sigma_{m-1}^{\mu}(S_-) = \int_{S_-} f d\sigma_{m-1} = \int_G (f \circ \vec{r}_-)(\vec{u}) \cdot \sqrt{1 + \left\|\overrightarrow{grad}\, (-\varphi)(\vec{u})\right\|^2} d\vec{u},$$

де $\vec{r}_-: G \ni (u_1, \dots, u_{m-1})^T \mapsto \left(u_1, \dots, u_{m-1}, -\varphi(u_1, \dots, u_{m-1})\right)^T \in S_-$ – бієктивна параметризація півсфери S_-.

Оскільки $\forall \vec{u} \in G$, $\forall j \in \{1, \dots, m-1\}$: $\frac{\partial(-\varphi)}{\partial u_j}(\vec{u}) = -\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(\vec{u})$, то $\left(\frac{\partial(-\varphi)}{\partial u_j}(\vec{u})\right)^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(\vec{u})\right)^2$, тому

$$\sqrt{1 + \left\|\overrightarrow{grad}\, (-\varphi)(\vec{u})\right\|^2} = \sqrt{1 + \left\|\overrightarrow{grad}\, \varphi(\vec{u})\right\|^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \|\vec{u}\|^2}}.$$

Таким чином, $\sigma_{m-1}^{\mu}(S_-) = \int_G (f \circ \vec{r}_-)(\vec{u}) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - \|\vec{u}\|^2}} d\vec{u}$.

Користуючись адитивністю міри, одержуємо рівність $\sigma_{m-1}^{\mu}(S) = \sigma_{m-1}^{\mu}(S_+) + \sigma_{m-1}^{\mu}(S_-)$. Остаточна формула асоційованої поверхневої міри гіперсфери S у випадку, коли вигляд неперервної функції f невідомий, є такою:

$$\sigma_{m-1}^{\mu}(S) = \int_G \Big(f\big(\vec{r}_+(\vec{u})\big) + f\big(\vec{r}_-(\vec{u})\big)\Big) \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - \|\vec{u}\|^2}} d\vec{u}.$$

Припустимо тепер, що $f \equiv C$, де $C \in \mathbb{R}$, тобто $\mu = C \cdot \lambda_m$. Тоді також $f \circ \vec{r}_+ \equiv C$ та $f \circ \vec{r}_- \equiv C$. Має місце формула $\sigma_{m-1}^{\mu}(S) = 2C \cdot \int_G \frac{R}{\sqrt{R^2 - \|\vec{u}\|^2}} d\vec{u}$. Перейдемо до узагальнених сферичних координат в $\mathbb{R}^{m-1}$:

$$\begin{aligned}
&u_1 = \rho \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \dots \sin\alpha_{m-2} \\
&u_2 = \rho \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \dots \sin\alpha_{m-2} \\
&u_3 = \rho \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 \dots \sin\alpha_{m-2} \\
&\vdots \\
&u_{m-1} = \rho \cos\alpha_{m-2}\,,
\end{aligned}$$

де $\rho \geq 0$, $\alpha_1 \in [0; 2\pi); \alpha_2, \dots, \alpha_{m-2} \in [0; \pi]$. Множині G в узагальнених сферичних координатах відповідає множина

$$\Pi \coloneqq \{(\rho, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-2})^T \in \mathbb{R}^{m-1} : \rho \in [0; R); \alpha_1 \in [0; 2\pi); \alpha_2, \dots, \alpha_{m-2} \in [0; \pi]\}.$$

Якобіан переходу від декартових до узагальнених сферичних координат становить $\rho^{\,m-2} \sin\alpha_2 \sin^2\alpha_3 \dots \sin^{m-3}\alpha_{m-2}$, при вказаних межах зміни параметрів $\rho, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-2}$ він невід'ємний. Зауважимо, що $\sqrt{R^2 - \|\vec{u}\|^2} = \sqrt{R^2 - \rho^2}$. Отже,

$$\sigma_{m-1}^{\mu}(S) = 2C \cdot \int_\Pi \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho^{\,m-2} \sin\alpha_2 \sin^2\alpha_3 \dots \sin^{m-3}\alpha_{m-2} \, d\rho d\alpha_1 \dots d\alpha_{m-2}.$$

Оскільки П має вигляд $[0;R)\times[0;2\pi)\times[0;\pi]\times\ldots\times[0;\pi]$, то інтеграл розпадається на добуток m-1 інтегралів:

$$\sigma_{m-1}^{\mu}(S)=$$
$$=2CR\left(\int_0^R\frac{\rho^{m-2}}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi}1d\alpha_1\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\alpha_2\,d\alpha_2\right)\ldots\left(\int_0^{\pi}\sin^{m-3}\alpha_{m-2}\,d\alpha_{m-2}\right).$$

Очевидно, що $\int_0^{2\pi}1d\alpha_1=2\pi$. Крім того, із леми 19 випливає, що $\left(\int_0^{\pi}\sin\alpha_2\,d\alpha_2\right)\ldots\left(\int_0^{\pi}\sin^{m-3}\alpha_{m-2}\,d\alpha_{m-2}\right)=\prod_{i=1}^{m-3}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)}=\pi^{\frac{m-3}{2}}\prod_{i=1}^{m-3}\frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)}$.

Отримуємо рівність $\sigma_{m-1}^{\mu}(S)=2CR\cdot2\pi\cdot\pi^{\frac{m-3}{2}}\prod_{i=1}^{m-3}\frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)}\cdot\int_0^R\frac{\rho^{m-2}}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho$, тобто $\sigma_{m-1}^{\mu}(S)=4CR\pi^{\frac{m-1}{2}}\prod_{i=1}^{m-3}\frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)}\cdot\int_0^R\frac{\rho^{m-2}}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho$.

Лема 21. Нехай $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $R>0$. Тоді $\int_0^R\frac{x^n}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\frac{\sqrt{\pi}R^n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $n\in\mathbb{N}$. Зробимо заміну змінних $t\coloneqq x^2$. Тоді $\int_0^R\frac{x^n}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^{R^2}t^{\frac{n-1}{2}}(R^2-t)^{-\frac{1}{2}}dt$. Тепер зробимо заміну $u\coloneqq\frac{t}{R^2}$: $\frac{1}{2}\int_0^{R^2}t^{\frac{n-1}{2}}(R^2-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{R^n}{2}\int_0^1u^{\frac{n-1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du$. За означенням бета-функції, $\frac{R^n}{2}\int_0^1u^{\frac{n-1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du=\frac{R^n}{2}\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)$. За однією з властивостей бета-функції, $\frac{R^n}{2}\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{R^n}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. Отже, $\int_0^R\frac{x^n}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\frac{\sqrt{\pi}R^n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$, і лему для випадку $n\in\mathbb{N}$ доведено.

Нехай тепер $n=0$. Однією з первісних функції $\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}$ на $(0;R)$ є функція $\arcsin\frac{x}{R}$, тому $\int_0^R\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=\arcsin1-\arcsin0=\frac{\pi}{2}$. Легко бачити, що вираз $\frac{\sqrt{\pi}R^n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$, отриманий для випадку $n\in\mathbb{N}$, співпадає з $\frac{\pi}{2}$, якщо $n=0$. ∎

За лемою 21, поклавши $n = m - 2$, маємо $\int_0^R \frac{\rho^{m-2}}{\sqrt{R^2-\rho^2}} d\rho = \frac{\sqrt{\pi} R^{m-2} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$. Звідси отримуємо рівність $\sigma_{m-1}^{\mu}(S) = 4CR\pi^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi} R^{m-2} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \prod_{i=1}^{m-3} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)}$, тобто

$$\sigma_{m-1}^{\mu}(S) = 2CR^{m-1}\pi^{m/2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \prod_{i=1}^{m-3} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)}.$$

Помітимо, що $\frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \prod_{i=1}^{m-3} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)} = \prod_{i=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)}$. За лемою 20, $\prod_{i=1}^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{i+2}{2}\right)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$. Отримуємо остаточний результат:

$$\sigma_{m-1}^{\mu}(S) = \frac{2CR^{m-1}\pi^{m/2}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

У випадку $C = 1$ (тобто якщо $\mu = \lambda_m$) маємо відому формулу

$$\sigma_{m-1}(S) = \frac{2\pi^{m/2} R^{m-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$$

класичного (m-1)-вимірного об’єму гіперсфери радіуса R в $\mathbb{R}^m$ (див., наприклад, [26]).

3.5 Висновки за розділом 3

Отже, у розділі 3 висвітлено адаптацію альтернативного способу конструювання поверхневої міри до випадку поверхонь скінченної корозмірності, вкладених в $\mathbb{R}^m$. Доведено, що альтернативна конструкція цілком узгоджується із запропонованою у розділі 2 узагальненою класичною конструкцією поверхневої міри як у частковому випадку (для поверхонь, що є графіками гладких числових функцій), так і в загальному (для поверхонь довільної корозмірності, вкладених у $\mathbb{R}^m$).

Наведено приклад застосування запропонованої конструкції поверхневої міри, асоційованої з неінваріантною мірою у просторі, а саме: розглянуто гіперсферу $S \subset \mathbb{R}^m$ довільного додатного радіуса R із центром в нулі (в евклідовій метриці). Двома різними способами (параметризація гіперсфери узагальненими сферичними координатами та розбиття гіперсфери на дві півсфери, кожна з яких є графіком гладкої функції) виведено формулу асоційованої поверхневої міри вказаної гіперсфери. Отриману формулу конкретизовано для випадку, коли щільність міри у просторі відносно лебегової міри є сталою функцією на $\mathbb{R}^m$, і показано, що в разі, коли міра у просторі співпадає з лебегової, одержане нами співвідношення збігається з відомою формулою класичного (m-1)-вимірного об'єму гіперсфери радіуса R в $\mathbb{R}^m$.

ВИСНОВКИ

У роботі вивчено властивості гладких поверхонь довільної корозмірності, вкладених у скінченновимірний евклідів простір, та запропоновано спосіб побудови міри таких поверхонь, яка асоційована із неінваріантною мірою у вихідному скінченновимірному просторі. Для довільної міри, абсолютно неперервної відносно інваріантної міри Лебега із неперервною похідною Радона–Нікодима, побудовано поверхневу міру, асоційовану з даною мірою. Дослідження мір на нескінченновимірних лінійних просторах та нелінійних многовидах є нині однією з базових проблем у нескінченновимірному аналізі. Конструкція поверхневих мір, запропонована у нашій роботі, принципово відрізняється від відомих підходів у випадку неінваріантних мір та є оригінальним узагальненням класичної конструкції, яка раніше розглядалася тільки для інваріантних мір. Адекватність отриманих результатів підтверджується тим, що у випадку, коли похідна Радона–Нікодима розглядуваної міри у просторі є тотожно одиничною функцією, асоційована поверхнева міра поверхні збігається із класичною конструкцією поверхневої міри.

Досліджено узгодженість розробленої узагальненої класичної конструкції із альтернативним підходом, наведеним у роботах Ю. В. Богданського та К. В. Моравецької, в якому поверхнева міра будується на основі асоційованої форми поверхні та строго трансверсального до поверхні набору векторних полів, що попарно комутують. З’ясовано, що вказані методики є еквівалентними.

Подальший розвиток результатів, понять та методів, наведених у магістерській дисертації, має перспективи у теорії міри та нескінченновимірному аналізі. Можливі застосування результатів роботи пов’язані із функціональним та математичним аналізом, дослідженням крайових задач у просторах нескінченновимірного аргументу, теорією випадкових процесів, а також теоретичною фізикою.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Зорич В. А. Математический анализ: в 2 ч. Изд. 6-е, дополн. Москва: МЦНМО, 2012. Ч. 2. 818 с.

2. Богачев В. И. Основы теории меры: в 2 т. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. Т. 1. 544 с.

3. Богачев В. И. Основы теории меры: в 2 т. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. Т. 2. 576 с.

4. Скороход А. В. Интегрирование в гильбертовом пространстве. Москва: Наука, 1975. 231 с.

5. Угланов А. В. Поверхностные интегралы в пространствах Фреше. *Мат. сб.* 1998. 189, № 11. С. 139–157.

6. Uglanov A. V. Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 262 p.

7. Пугачев О. В. Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах. *Теория вероятностей и ее применения*. 2008. 53, № 1. С. 178–188.

8. Богданский Ю. В. Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса–Остроградского. *Украинский математический журнал*. 2012. т. 64, № 10. С. 1299–1313.

9. Богданський Ю. В. Бездивергентний варіант формули Гаусса–Остроградського на нескінченновимірних многовидах. *Наукові вісті НТУУ „КПІ”*. 2008. № 4. С. 132–138.

10. Богданский Ю. В., Моравецкая Е. В. Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой. *Украинский математический журнал*. 2017. т. 69, № 8. С. 1030–1048.

11. Богданский Ю. В., Моравецкая Е. В. Транзитивность поверхностных мер на банаховых многообразиях с равномерной структурой. *Украинский математический журнал*. 2017. т. 69, № 10. С. 1299–1309.

12. Моравецька К. В. Альтернативна конструкція поверхневих мір у скінченновимірних просторах та її узгодженість із класичним підходом. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*. 2017. № 4. С. 66–72.

13. Богачев В. И. Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна. / Ижевский институт компьютерных исследований. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 544 с.

14. Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н. Введение в топологию: учебное пособие. Изд. 2-е, доп. Москва: Наука. Физматлит, 1995. 416 с.

15. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976. 544 с.

16. Богданський Ю. В. Інтеграл у курсі математичного аналізу: навч. посіб. Київ: НТУУ «КПІ», 2013. 180 с.

17. Спивак М. Математический анализ на многообразиях / ред. Д. А. Райков; пер.: И. А. Березанский. Москва: Мир, 1968. 165 с.

18. Яковлев Г. Н. Функциональные пространства: учебное пособие. Московский физико-технический институт, 2000. 128 с.

19. Позняк Э. Г., Шикин Е. В. Дифференциальная геометрия: первое знакомство. Москва: Издательство МГУ, 1990. 384 с.

20. Зорич В. А. Математический анализ: в 2 ч. Изд. 6-е, дополн. Москва: МЦНМО, 2012. Ч. 1. 702 с.

21. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре: учебное пособие для вузов. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 416 с.

22. Сніжко Б. М. Поверхневі міри, асоційовані з неінваріантною мірою у скінченновимірному просторі. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2019. № 4. Подана до друку.

23. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. Изд. 3-е, перераб. и доп. Москва: Наука, 1989. 472 с.

24. Сніжко Б. М. Альтернативна конструкція поверхневої міри у скінченновимірному просторі. *Mathematics in Modern Technical University*. 2018. №1. С. 19–31.

25. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре / ред. В. В. Воеводин. Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1975. 320 с.

26. Математическая энциклопедия: в 5 т. / гл. ред. И. М. Виноградов. Москва: «Советская энциклопедия», 1984. Т. 5. 1248 с.